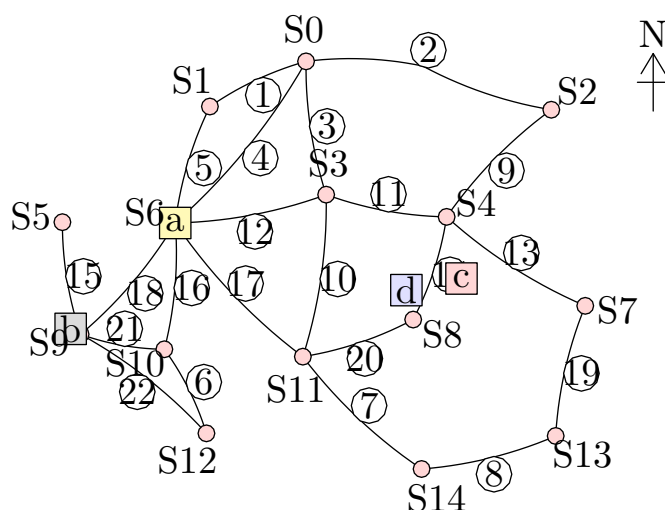


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue Basse	⑫ rue du Pont	S0 Rond-point du Pont	a la poste
② rue Verte	⑬ rue du Puits	S1 Place de l'Église	b l'église
③ quai aux Fleurs	⑭ rue du Stade	S2 Coin du Lavoir	c le lavoir
④ rue Haute	⑮ impasse du Vieux-Four	S3 Carrefour des Tilleuls	d l'école
⑤ rue du Moulin	⑯ chemin du Lavoir	S4 Carrefour du Moulin	
⑥ chemin de Ronde	⑰ rue du Four	S5 Place des Tanneurs	
⑦ rue des Écoles	⑱ rue Neuve	S6 Carrefour de l'Hôpital	
⑧ boulevard du Parc	⑲ rue Pasteur	S7 Fontaine Notre-Dame	
⑨ passage du Marché	⑳ sentier des Prés	S8 Place du Vieux-Puits	
⑩ chemin des Vignes	21 rue des Lilas	S9 Rond-point de la Gare	
⑪ rue de l'Église	22 chemin Creux	S10 Rond-point de la Poste	
		S11 Carrefour de la Mairie	
		S12 Place de la Fontaine	
		S13 Place aux Herbes	
		S14 Place du Marché	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°106

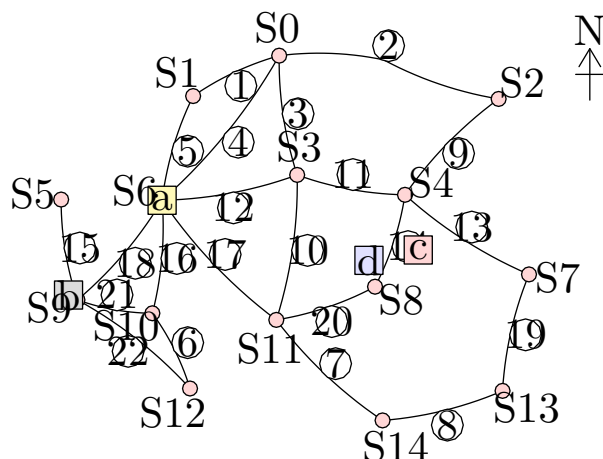


-
1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
 2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?



Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
Nombre de rues	4	2	2	4	4	1	6	2	2	4	3	4	2	2	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	impair	pair	pair	pair	pair	impair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $44 = 2 \times 22$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S5, S10 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S6**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, S5 et S10 : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Or la poste est en **S6**, où aboutit un nombre **pair** de rues. Ce carrefour ne peut être que traversé, jamais servir de départ.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de S5 à S10. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.



Ce parcours, en partant de S5 :

1. Il part de Place des Tanneurs (S5), prend l'impasse du Vieux-Four ⑮ vers le sud et atteint Rond-point de la Gare (S9).
2. Il tourne à gauche dans la rue Neuve ⑮, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S6).
3. Il continue tout droit dans la rue Haute ④, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Pont (S0).
4. Il tourne à gauche dans la rue Basse ①, vers le sud-ouest, jusqu'à Place de l'Église (S1).
5. Il continue tout droit dans la rue du Moulin ⑤, vers le sud, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S6).
6. Il tourne à gauche dans la rue du Pont ⑫, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S3).
7. Il tourne à gauche dans le quai aux Fleurs ③, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Pont (S0).
8. Il tourne à droite dans la rue Verte ②, vers l'est, jusqu'à Coin du Lavoir (S2).
9. Il tourne à droite dans le passage du Marché ⑨, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin (S4).
10. Il tourne à droite dans la rue de l'Église ⑪, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S3).
11. Il tourne à gauche dans le chemin des Vignes ⑩, vers le sud, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S11).
12. Il tourne à gauche dans la rue des Écoles ⑦, vers le sud-est, jusqu'à Place du Marché (S14).
13. Il tourne à gauche dans le boulevard du Parc ⑧, vers l'est, jusqu'à Place aux Herbes (S13).
14. Il tourne à gauche dans la rue Pasteur ⑰, vers le nord, jusqu'à Fontaine Notre-Dame (S7).
15. Il tourne à gauche dans la rue du Puits ⑬, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin (S4).
16. Il tourne à gauche dans la rue du Stade ⑭, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits (S8).
17. Il tourne à droite dans le sentier des Prés ⑳, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S11).
18. Il tourne à droite dans la rue du Four ⑰, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S6).
19. Il tourne à gauche dans le chemin du Lavoir ⑩, vers le sud, jusqu'à Rond-point de la Poste (S10).
20. Il tourne à gauche dans le chemin de Ronde ⑥, vers le sud-est, jusqu'à Place de la Fontaine (S12).
21. Il prend dans le chemin Creux 22, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare (S9).
22. Il prend dans la rue des Lilas 21, vers l'est, jusqu'à Rond-point de la Poste (S10).

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.