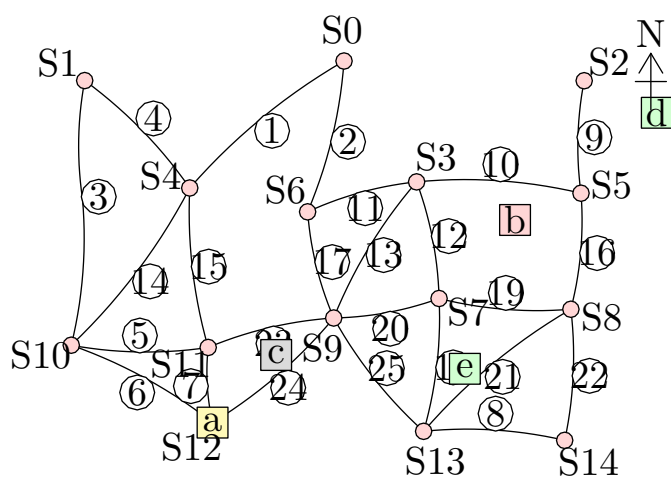


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue Basse	⑭ allée des Tilleuls	S0 Place des Tanneurs	a la poste
② rue Haute	⑮ rue Pasteur	S1 Fontaine Notre-Dame	b le lavoir
③ passage du Marché	⑯ rue du Puits	S2 Place du Marché	c le gymnase
④ rue de la Mairie	⑰ venelle du Chat	S3 Rond-point de la Poste	d la mairie
⑤ chemin du Lavoir	⑱ rue de la Poste	S4 Carrefour de la Mairie	e la gendarmerie
⑥ allée des Peupliers	⑲ chemin de Ronde	S5 Rond-point du Stade	
⑦ rue du Moulin	⑳ sentier des Prés	S6 Rond-point des Vaches	
⑧ rue des Écoles	21 chemin des Vignes	S7 Rond-point du Pont	
⑨ impasse du Vieux-Four	22 boulevard du Parc	S8 Carrefour de l'Hôpital	
⑩ rue des Lilas	23 chemin Creux	S9 Carrefour du Lavoir	
⑪ rue Neuve	24 rue Verte	S10 Carrefour Saint-Roch	
⑫ rue du Four	25 quai aux Fleurs	S11 Carrefour des Quatre-Chemins	
⑬ avenue de la Gare		S12 Carrefour du Moulin	
		S13 Carrefour des Tilleuls	
		S14 Place de la Fontaine	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.



La tournée du facteur

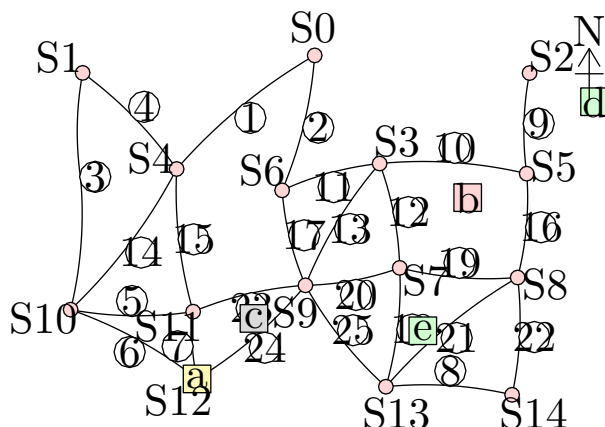
Problème — Fiche n°108



-
1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
 2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
Nombre de rues	2	2	1	4	4	3	3	4	4	6	4	4	3
Parité	pair	pair	impair	pair	pair	impair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $50 = 2 \times 25$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S2, S5, S6, S12 — il y en a 4.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en S12, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (S2, S5, S6, S12).

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

Combien de rues en double, au minimum ? Il faut appairer les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°108



À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.