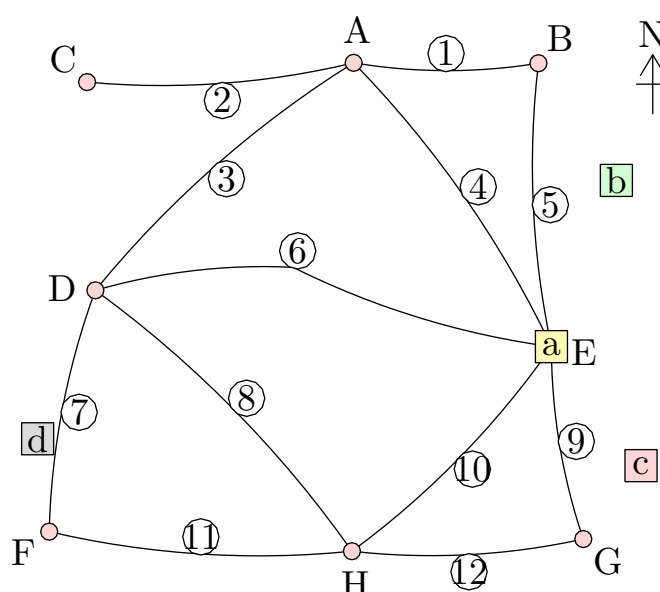


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue du Stade	⑦ rue des Lilas	(A) Carrefour du Lavoir	a la poste
② impasse des Roses	⑧ venelle du Chat	(B) Place du Marché	b la gendarmerie
③ chemin des Vignes	⑨ rue Verte	(C) Coin du Lavoir	c la pharmacie
④ rue Haute	⑩ sentier des Prés	(D) Rond-point de la Gare	d le stade
⑤ allée des Peupliers	⑪ avenue de la Gare	(E) Rond-point des Vaches	
⑥ chemin du Lavoir	⑫ rue du Moulin	(F) Place de l'Église	
		(G) Place Sainte-Croix	
		(H) Carrefour de la Mairie	

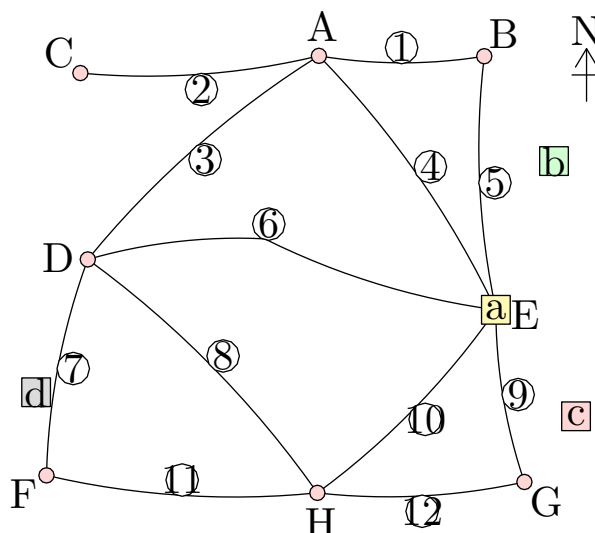
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de rues	4	2	1	4	5	2	2	4
Parité	pair	pair	impair	pair	impair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $24 = 2 \times 12$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : C, E — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **E**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, C et E, et la poste est justement sur l'un des deux (E). Il part donc de la poste et termine en C, l'autre carrefour impair.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°126



Voici une tournée possible :

1. Il part de Rond-point des Vaches **(E)**, prend la **rue Haute** ④ vers le nord-ouest et atteint Carrefour du Lavoir **(A)**.
2. Il tourne à droite dans la **rue du Stade** ①, vers l'est, jusqu'à Place du Marché **(B)**.
3. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ⑤, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches **(E)**.
4. Il tourne à droite dans le **chemin du Lavoir** ⑥, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare **(D)**.
5. Il tourne à gauche dans la **rue des Lilas** ⑦, vers le sud, jusqu'à Place de l'Église **(F)**.
6. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ⑪, vers l'est, jusqu'à Carrefour de la Mairie **(H)**.
7. Il continue tout droit dans le **sentier des Prés** ⑩, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point des Vaches **(E)**.
8. Il tourne à droite dans la **rue Verte** ⑨, vers le sud, jusqu'à Place Sainte-Croix **(G)**.
9. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** ⑫, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de la Mairie **(H)**.
10. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑧, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare **(D)**.
11. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ③, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour du Lavoir **(A)**.
12. Il prend dans l'**impasse des Roses** ②, vers l'ouest, jusqu'à Coin du Lavoir **(C)**.

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en C ou en E : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.