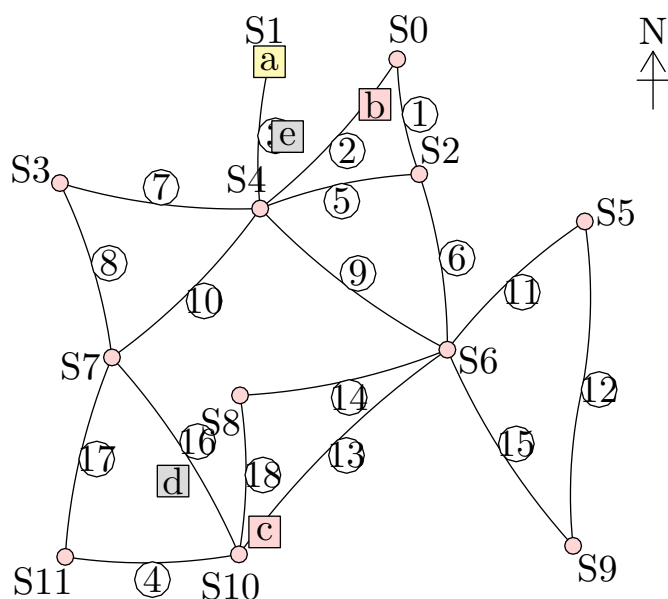




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① chemin des Vignes	⑩ rue du Stade	S0 Place de l'Église	a la poste
② rue de la Mairie	⑪ allée des Tilleuls	S1 Place aux Herbes	b le marché couvert
③ impasse Verte	⑫ allée des Peupliers	S2 Carrefour Saint-Roch	c la boulangerie
④ chemin Creux	⑬ rue Haute	S3 Fontaine Notre-Dame	d le gymnase
⑤ sentier des Prés	⑭ boulevard du Parc	S4 Carrefour de l'Hôpital	e le stade
⑥ passage du Marché	⑮ rue des Lilas	S5 Place des Tanneurs	
⑦ rue de l'Église	⑯ avenue de la Gare	S6 Carrefour des Quatre-Chemins	
⑧ rue du Puits	⑰ venelle du Chat	S7 Carrefour du Moulin	
⑨ rue du Moulin	⑱ rue du Four	S8 Place de la Fontaine	
		S9 Place du Vieux-Puits	
		S10 Rond-point de la Gare	
		S11 Place du Marché	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



La tournée du facteur

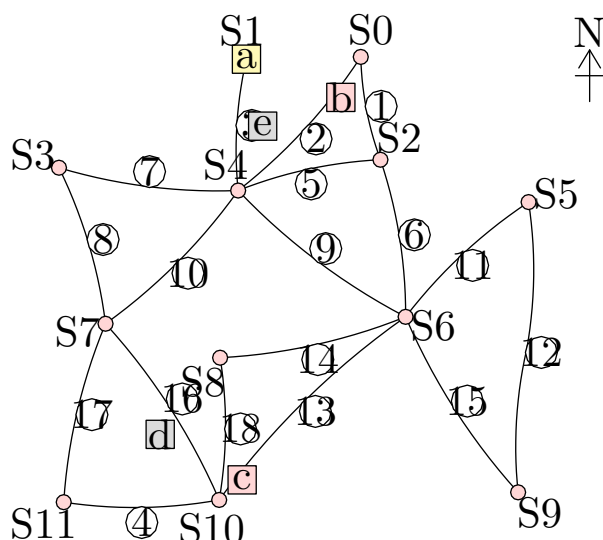
Problème — Fiche n°136



-
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Nombre de rues	2	1	3	2	6	2	6	4	2	2	4	2
Parité	pair	impair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $36 = 2 \times 18$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S1, S2 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S1**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, S1 et S2, et la poste est justement sur l'un des deux (S1). Il part donc de la poste et termine en S2, l'autre carrefour impair.



Voici une tournée possible :

1. Il part de Place aux Herbes (S1), prend l'**impasse Verte** ③ vers le sud et atteint Carrefour de l'Hôpital (S4).
2. Il tourne à gauche dans la **rue de la Mairie** ②, vers le nord-est, jusqu'à Place de l'Église (S0).
3. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ①, vers le sud, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (S2).
4. Il tourne à droite dans le **sentier des Prés** ⑤, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S4).
5. Il continue tout droit dans la **rue de l'Église** ⑦, vers l'ouest, jusqu'à Fontaine Notre-Dame (S3).
6. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ⑧, vers le sud, jusqu'à Carrefour du Moulin (S7).
7. Il tourne à gauche dans la **rue du Stade** ⑩, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S4).
8. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** ⑨, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S6).
9. Il tourne à gauche dans l'**allée des Tilleuls** ⑪, vers le nord-est, jusqu'à Place des Tanneurs (S5).
10. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ⑫, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits (S9).
11. Il tourne à droite dans la **rue des Lilas** ⑮, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S6).
12. Il tourne à gauche dans la **rue Haute** ⑬, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare (S10).
13. Il tourne à droite dans le **chemin Creux** ④, vers l'ouest, jusqu'à Place du Marché (S11).
14. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑰, vers le nord, jusqu'à Carrefour du Moulin (S7).
15. Il tourne à droite dans l'**avenue de la Gare** ⑯, vers le sud-est, jusqu'à Rond-point de la Gare (S10).
16. Il tourne à gauche dans la **rue du Four** ⑱, vers le nord, jusqu'à Place de la Fontaine (S8).
17. Il tourne à droite dans le **boulevard du Parc** ⑭, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S6).
18. Il tourne à gauche dans le **passage du Marché** ⑥, vers le nord, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (S2).

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en S1 ou en S2 : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.