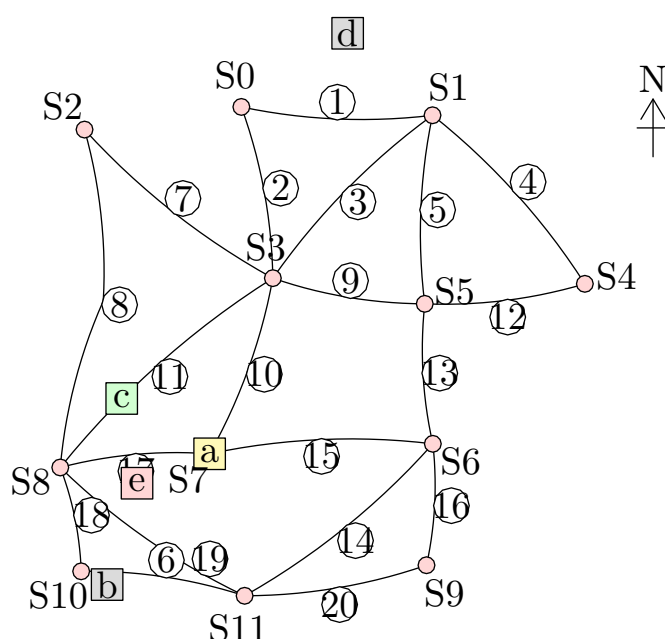


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue Verte	⑪ allée des Tilleuls	S0 Place du Marché	a la poste
② rue des Écoles	⑫ chemin des Vignes	S1 Rond-point de la Poste	b l'église
③ chemin de Ronde	⑬ rue Basse	S2 Coin du Lavoir	c la mairie
④ chemin Creux	⑭ venelle du Chat	S3 Carrefour de l'Hôpital	d le gymnase
⑤ rue du Four	⑮ sentier des Prés	S4 Place Sainte-Croix	e la boulangerie
⑥ rue Haute	⑯ rue de la Mairie	S5 Rond-point du Pont	
⑦ rue du Moulin	⑰ rue des Lilas	S6 Carrefour du Moulin	
⑧ rue Pasteur	⑱ allée des Peupliers	S7 Rond-point de la Gare	
⑨ rue Neuve	⑲ rue des Jardins	S8 Carrefour Saint-Roch	
⑩ boulevard du Parc	⑳ rue du Pont	S9 Place du Vieux-Puits	
		S10 Place des Tanneurs	
		S11 Carrefour du Lavoir	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



La tournée du facteur

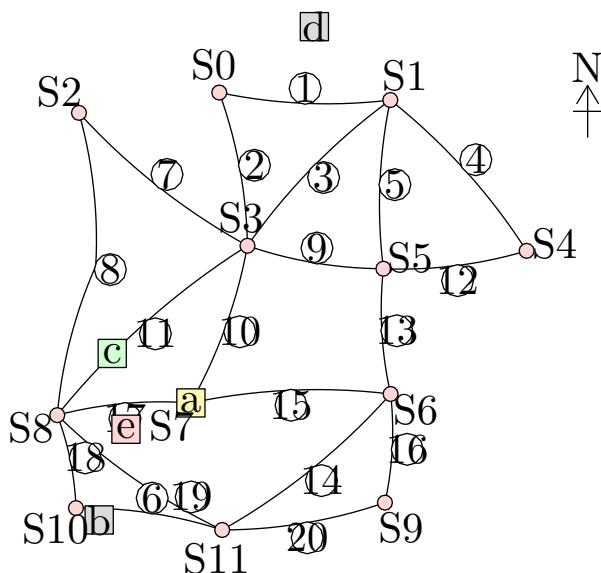
Problème — Fiche n°137



-
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Nombre de rues	2	4	2	6	2	4	4	3	5	2	2	4
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	impair	impair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $40 = 2 \times 20$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S7, S8 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S7**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, S7 et S8, et la poste est justement sur l'un des deux (S7). Il part donc de la poste et termine en S8, l'autre carrefour impair.



Voici une tournée possible :

1. Il part de Rond-point de la Gare (**S7**), prend le **boulevard du Parc** ⑩ vers le nord et atteint Carrefour de l'Hôpital (**S3**).
2. Il continue tout droit dans la **rue des Écoles** ②, vers le nord, jusqu'à Place du Marché (**S0**).
3. Il tourne à droite dans la **rue Verte** ①, vers l'est, jusqu'à Rond-point de la Poste (**S1**).
4. Il tourne à droite dans le **chemin de Ronde** ③, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (**S3**).
5. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** ⑦, vers le nord-ouest, jusqu'à Coin du Lavoir (**S2**).
6. Il prend dans la **rue Pasteur** ⑧, vers le sud, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (**S8**).
7. Il tourne à gauche dans l'**allée des Tilleuls** ⑪, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (**S3**).
8. Il tourne à droite dans la **rue Neuve** ⑨, vers l'est, jusqu'à Rond-point du Pont (**S5**).
9. Il tourne à gauche dans la **rue du Four** ⑤, vers le nord, jusqu'à Rond-point de la Poste (**S1**).
10. Il tourne à droite dans le **chemin Creux** ④, vers le sud-est, jusqu'à Place Sainte-Croix (**S4**).
11. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ⑫, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point du Pont (**S5**).
12. Il tourne à gauche dans la **rue Basse** ⑬, vers le sud, jusqu'à Carrefour du Moulin (**S6**).
13. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑭, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour du Lavoir (**S11**).
14. Il tourne à droite dans la **rue Haute** ⑥, vers l'ouest, jusqu'à Place des Tanneurs (**S10**).
15. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ⑱, vers le nord, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (**S8**).
16. Il tourne à droite dans la **rue des Lilas** ⑰, vers l'est, jusqu'à Rond-point de la Gare (**S7**).
17. Il continue tout droit dans le **sentier des Prés** ⑮, vers l'est, jusqu'à Carrefour du Moulin (**S6**).
18. Il tourne à droite dans la **rue de la Mairie** ⑯, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits (**S9**).
19. Il tourne à droite dans la **rue du Pont** ⑳, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour du Lavoir (**S11**).
20. Il continue tout droit dans la **rue des Jardins** ⑲, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (**S8**).

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en S7 ou en S8 : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.