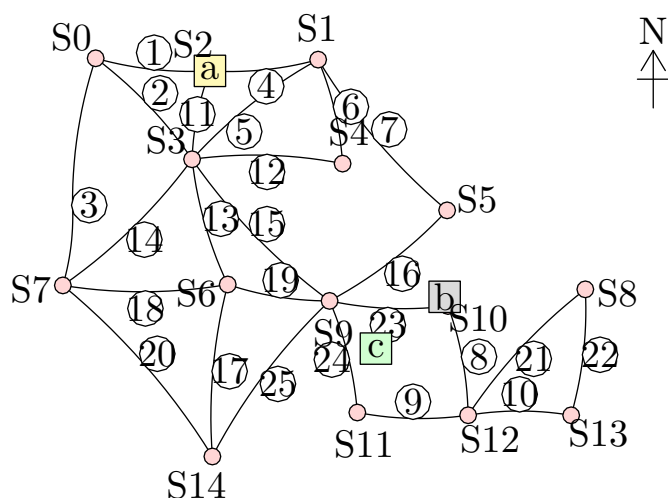


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue des Jardins	⑭ rue du Stade	S0 Rond-point des Vaches	a la poste
② rue du Moulin	⑮ chemin des Vignes	S1 Carrefour Saint-Roch	b le cimetière
③ venelle du Chat	⑯ rue du Four	S2 Rond-point de la Gare	c la salle des fêtes
④ chemin Creux	⑰ chemin du Lavoir	S3 Carrefour des Quatre-Chemins	
⑤ rue du Pont	⑱ rue du Puits	S4 Place du Vieux-Puits	
⑥ chemin de Ronde	⑲ rue de la Mairie	S5 Place du Marché	
⑦ allée des Peupliers	⑳ sentier des Prés	S6 Rond-point de la Poste	
⑧ rue des Écoles	21 rue Haute	S7 Carrefour de la Mairie	
⑨ rue de l'Église	22 passage du Marché	S8 Place Sainte-Croix	
⑩ quai aux Fleurs	23 rue Neuve	S9 Rond-point du Stade	
⑪ rue Pasteur	24 rue des Lilas	S10 Fontaine Notre-Dame	
⑫ boulevard du Parc	25 rue Basse	S11 Place de la Fontaine	
⑬ allée des Tilleuls		S12 Carrefour des Tilleuls	
		S13 Place des Tanneurs	
		S14 Carrefour du Lavoir	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.



La tournée du facteur

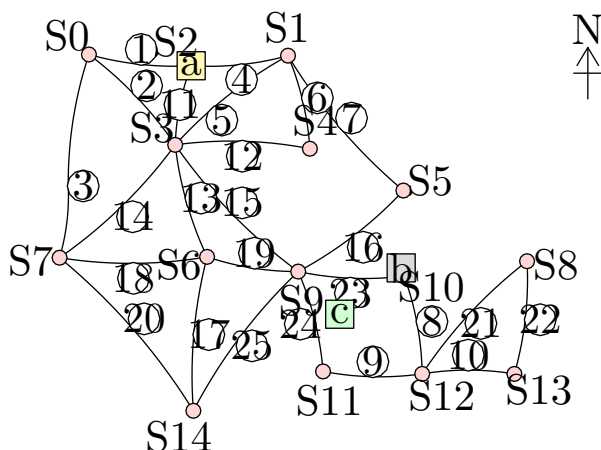
Problème — Fiche n°149



-
1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
 2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
Nombre de rues	3	4	3	7	2	2	4	4	2	6	2	2	4	4	3
Parité	impair	pair	impair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $50 = 2 \times 25$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S0, S2, S3, S14 — il y en a 4.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en S2, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (S0, S2, S3, S14).

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

Combien de rues en double, au minimum ? Il faut appairer les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.