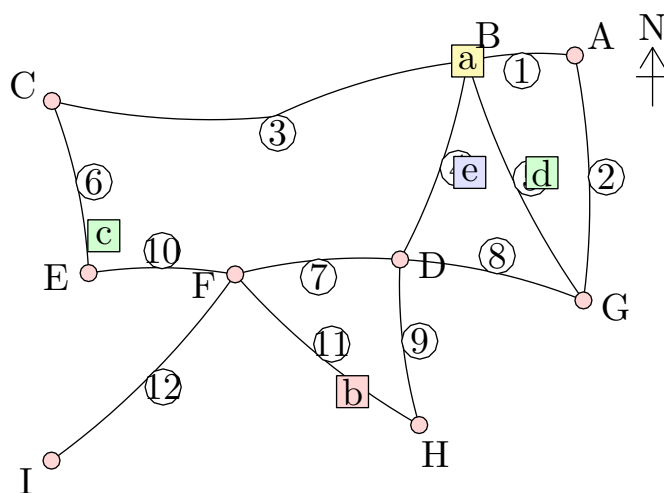


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue du Stade	⑦ sentier des Prés	Ⓐ Place de la Fontaine	a la poste
② allée des Tilleuls	⑧ rue de la Mairie	Ⓑ Carrefour des Tilleuls	b la boulangerie
③ chemin des Vignes	⑨ rue des Jardins	Ⓒ Place de l'Église	c la gendarmerie
④ rue Basse	⑩ rue du Puits	Ⓓ Rond-point de la Gare	d la salle des fêtes
⑤ rue du Pont	⑪ rue de la Poste	Ⓔ Fontaine Notre-Dame	e l'école
⑥ allée des Peupliers	⑫ impasse du Vieux-Four	Ⓕ Carrefour du Lavoir	
		Ⓖ Carrefour des Quatre-Chemins	
		Ⓗ Place aux Herbes	
		Ⓘ Placette des Ormes	

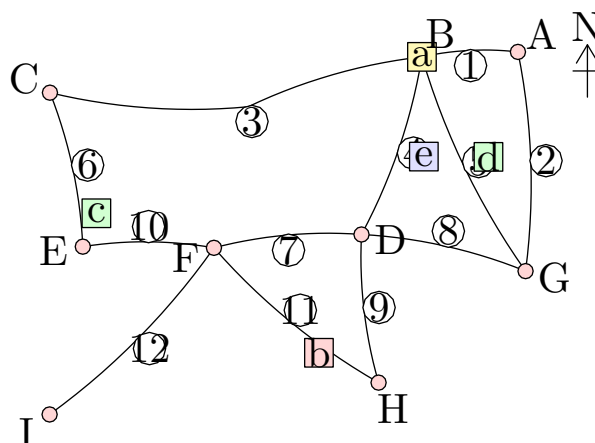
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Nombre de rues	2	4	2	4	2	4	3	2	1
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	impair	pair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $24 = 2 \times 12$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : G, I — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **B**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, G et I : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Or la poste est en **B**, où aboutit un nombre **pair** de rues. Ce carrefour ne peut être que traversé, jamais servir de départ.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de G à I. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.



Ce parcours, en partant de G :

1. Il part de Carrefour des Quatre-Chemins (**G**), prend l'**allée des Tilleuls** ② vers le nord et atteint Place de la Fontaine (**A**).
2. Il tourne à gauche dans la **rue du Stade** ①, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (**B**).
3. Il continue tout droit dans le **chemin des Vignes** ③, vers l'ouest, jusqu'à Place de l'Église (**C**).
4. Il tourne à gauche dans l'**allée des Peupliers** ⑥, vers le sud, jusqu'à Fontaine Notre-Dame (**E**).
5. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ⑩, vers l'est, jusqu'à Carrefour du Lavoir (**F**).
6. Il continue tout droit dans le **sentier des Prés** ⑦, vers l'est, jusqu'à Rond-point de la Gare (**D**).
7. Il tourne à gauche dans la **rue Basse** ④, vers le nord, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (**B**).
8. Il prend dans la **rue du Pont** ⑤, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (**G**).
9. Il tourne à droite dans la **rue de la Mairie** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare (**D**).
10. Il tourne à gauche dans la **rue des Jardins** ⑨, vers le sud, jusqu'à Place aux Herbes (**H**).
11. Il tourne à droite dans la **rue de la Poste** ⑪, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour du Lavoir (**F**).
12. Il tourne à gauche dans l'**impasse du Vieux-Four** ⑫, vers le sud-ouest, jusqu'à Placette des Ormes (**I**).

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.