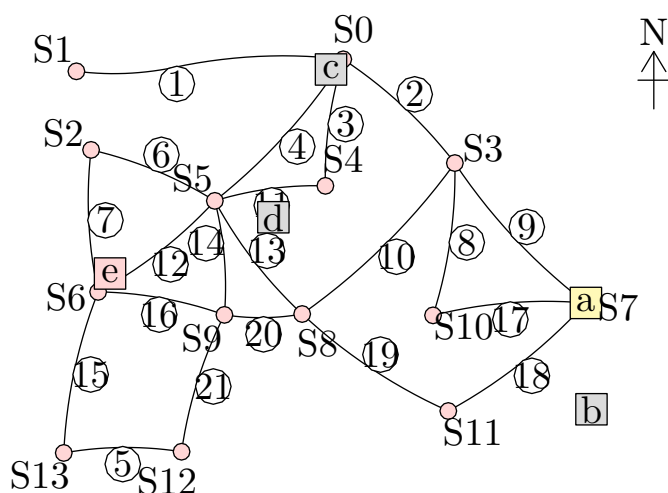


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① impasse Verte	⑫ chemin du Lavoir	S0 Rond-point du Pont	a la poste
② rue du Moulin	⑬ allée des Tilleuls	S1 Place Sainte-Croix	b l'église
③ rue des Lilas	⑭ rue Haute	S2 Place de la Fontaine	c le stade
④ rue Pasteur	⑮ avenue de la Gare	S3 Rond-point du Stade	d le cimetière
⑤ rue de la Poste	⑯ passage du Marché	S4 Place aux Herbes	e le lavoir
⑥ quai aux Fleurs	⑰ chemin Creux	S5 Carrefour du Moulin	
⑦ rue des Jardins	⑱ rue Basse	S6 Rond-point des Vaches	
⑧ rue du Pont	⑲ rue du Puits	S7 Carrefour des Tilleuls	
⑨ rue de l'Église	⑳ rue des Écoles	S8 Carrefour des Quatre-Chemins	
⑩ chemin des Vignes	21 rue Neuve	S9 Rond-point de la Poste	
⑪ chemin de Ronde		S10 Place du Vieux-Puits	
		S11 Coin du Lavoir	
		S12 Place de l'Église	
		S13 Place des Tanneurs	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



La tournée du facteur

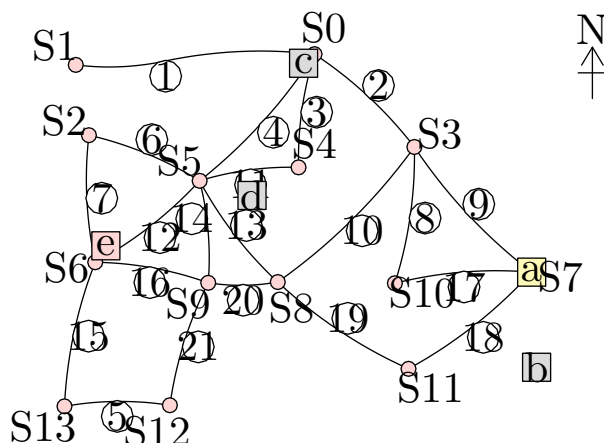
Problème — Fiche n°187



-
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13
Nombre de rues	4	1	2	4	2	6	4	3	4	4	2	2	2	2
Parité	pair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $42 = 2 \times 21$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S1, S7 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S7**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, S1 et S7, et la poste est justement sur l'un des deux (S7). Il part donc de la poste et termine en S1, l'autre carrefour impair.



Voici une tournée possible :

1. Il part de Carrefour des Tilleuls (S7), prend la **rue de l'Église** ⑨ vers le nord-ouest et atteint Rond-point du Stade (S3).
2. Il continue tout droit dans la **rue du Moulin** ②, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point du Pont (S0).
3. Il tourne à gauche dans la **rue des Lilas** ③, vers le sud, jusqu'à Place aux Herbes (S4).
4. Il tourne à droite dans le **chemin de Ronde** ⑪, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin (S5).
5. Il tourne à droite dans le **quai aux Fleurs** ⑥, vers l'ouest, jusqu'à Place de la Fontaine (S2).
6. Il tourne à gauche dans la **rue des Jardins** ⑦, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches (S6).
7. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ⑫, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour du Moulin (S5).
8. Il tourne à droite dans l'**allée des Tilleuls** ⑬, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S8).
9. Il tourne à gauche dans le **chemin des Vignes** ⑩, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Stade (S3).
10. Il tourne à droite dans la **rue du Pont** ⑧, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits (S10).
11. Il tourne à gauche dans le **chemin Creux** ⑰, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S7).
12. Il tourne à droite dans la **rue Basse** ⑱, vers le sud-ouest, jusqu'à Coin du Lavoir (S11).
13. Il tourne à droite dans la **rue du Puits** ⑲, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S8).
14. Il tourne à gauche dans la **rue des Écoles** ⑳, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point de la Poste (S9).
15. Il continue tout droit dans le **passage du Marché** ⑯, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches (S6).
16. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ⑮, vers le sud, jusqu'à Place des Tanneurs (S13).
17. Il tourne à gauche dans la **rue de la Poste** ⑤, vers l'est, jusqu'à Place de l'Église (S12).
18. Il tourne à gauche dans la **rue Neuve** 21, vers le nord, jusqu'à Rond-point de la Poste (S9).
19. Il continue tout droit dans la **rue Haute** ⑭, vers le nord, jusqu'à Carrefour du Moulin (S5).
20. Il tourne à droite dans la **rue Pasteur** ④, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Pont (S0).
21. Il tourne à gauche dans l'**impasse Verte** ①, vers l'ouest, jusqu'à Place Sainte-Croix (S1).

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en S1 ou en S7 : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.