La tournée du facteur

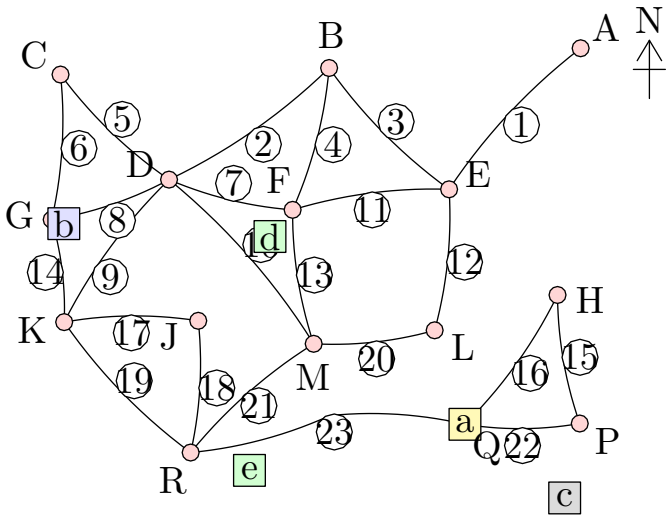
Problème — Fiche n°188

EULC0188

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① impasse du Vieux-Four	⑬ chemin de Ronde	Ⓐ Place du Vieux-Puits	**a** la poste
② rue Neuve	⑭ rue du Puits	Ⓑ Rond-point du Pont	**b** l'école
③ rue du Pont	⑮ rue des Lilas	Ⓒ Place aux Herbes	**c** l'église
④ venelle du Chat	⑯ chemin des Vignes	Ⓓ Rond-point du Stade	**d** la salle des fêtes
⑤ rue du Stade	⑰ quai aux Fleurs	Ⓔ Carrefour de la Mairie	**e** la gendarmerie
⑥ sentier des Prés	⑱ rue Haute	Ⓕ Carrefour de l'Hôpital	
⑦ rue de la Mairie	⑲ rue du Moulin	Ⓖ Rond-point des Vaches	
⑧ passage du Marché	⑳ rue des Écoles	Ⓗ Fontaine Notre-Dame	
⑨ rue Basse	㉑ avenue de la Gare	Ⓙ Coin du Lavoir	
⑩ chemin Creux	㉒ boulevard du Parc	Ⓚ Carrefour Saint-Roch	
⑪ rue Verte	㉓ allée des Peupliers	Ⓛ Place Sainte-Croix	
⑫ allée des Tilleuls		Ⓜ Carrefour du Lavoir	
		Ⓟ Place du Marché	
		Ⓠ Carrefour des Quatre-Chemins	
		Ⓡ Rond-point de la Gare	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

La tournée du facteur

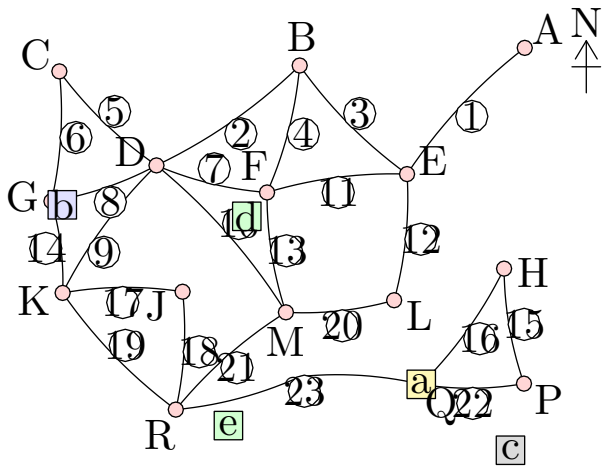
Problème — Fiche n°188

EULC0188

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	P
Nombre de rues	1	3	2	6	4	4	3	2	2	4	2	4	2
Parité	**impair**	**impair**	pair	pair	pair	pair	**impair**	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $46 = 2 \times 23$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : A, B, G, Q — il y en a 4.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **Q**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (A, B, G, Q).

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

Combien de rues en double, au minimum ? Il faut apparier les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°188

EULC0188

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.