La tournée du facteur

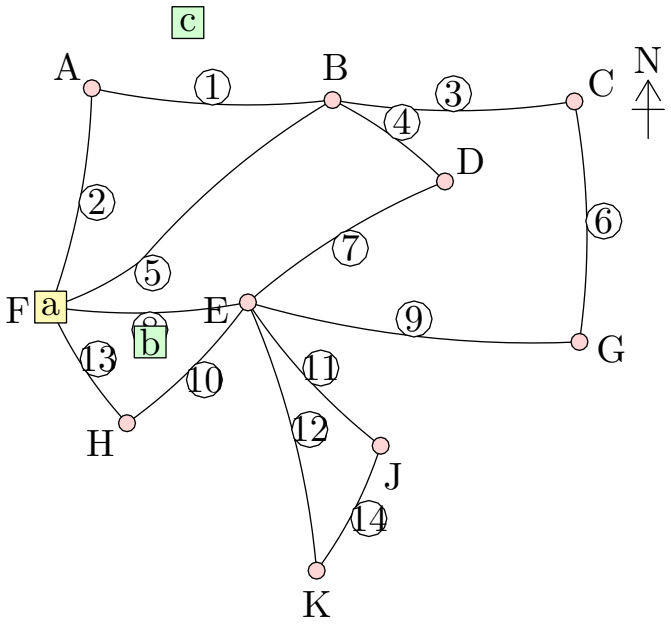
Problème — Fiche n°195

EULC0195

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue Verte	⑧ venelle du Chat	Ⓐ Place aux Herbes	**a** la poste
② rue des Écoles	⑨ sentier des Prés	Ⓑ Carrefour de l'Hôpital	**b** la salle des fêtes
③ rue Haute	⑩ chemin du Lavoir	Ⓒ Place de la Fontaine	**c** la mairie
④ rue du Stade	⑪ passage du Marché	Ⓓ Fontaine Notre-Dame	
⑤ rue du Pont	⑫ rue de la Mairie	Ⓔ Rond-point de la Poste	
⑥ rue de la Poste	⑬ rue des Lilas	Ⓕ Carrefour Saint-Roch	
⑦ rue Neuve	⑭ rue Pasteur	Ⓖ Place du Vieux-Puits	
		Ⓗ Place de l'Église	
		Ⓙ Place Sainte-Croix	
		Ⓚ Placette des Ormes	

Légende du plan

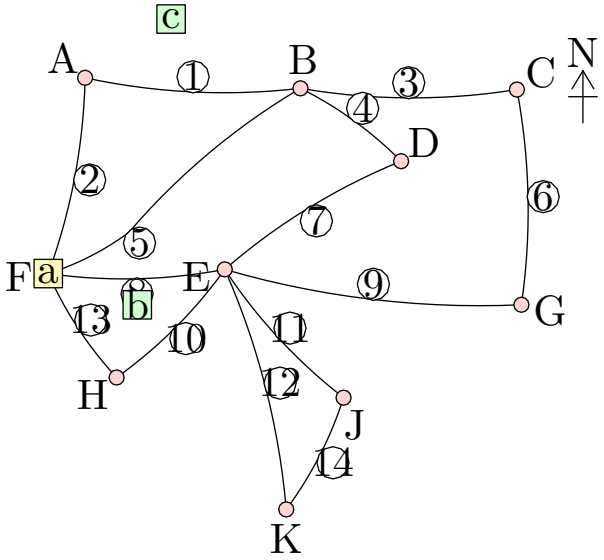
Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?

3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
Nombre de rues	2	4	2	2	6	4	2	2	2	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $28 = 2 \times 14$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **F**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient même à la poste sans l'avoir cherché.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°195

EULC0195

Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il part de Carrefour Saint-Roch **(F)**, prend la **rue des Écoles** ② vers le nord et atteint Place aux Herbes **(A)**.
2. Il tourne à droite dans la **rue Verte** ①, vers l'est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(B)**.
3. Il continue tout droit dans la **rue Haute** ③, vers l'est, jusqu'à Place de la Fontaine **(C)**.
4. Il tourne à droite dans la **rue de la Poste** ⑥, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(G)**.
5. Il tourne à droite dans le **sentier des Prés** ⑨, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point de la Poste **(E)**.
6. Il tourne à droite dans la **rue Neuve** ⑦, vers le nord-est, jusqu'à Fontaine Notre-Dame **(D)**.
7. Il tourne à gauche dans la **rue du Stade** ④, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(B)**.
8. Il tourne à gauche dans la **rue du Pont** ⑤, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour Saint-Roch **(F)**.
9. Il prend dans la **venelle du Chat** ⑧, vers l'est, jusqu'à Rond-point de la Poste **(E)**.
10. Il tourne à droite dans le **passage du Marché** ⑪, vers le sud-est, jusqu'à Place Sainte-Croix **(J)**.
11. Il tourne à droite dans la **rue Pasteur** ⑭, vers le sud-ouest, jusqu'à Placette des Ormes **(K)**.
12. Il tourne à droite dans la **rue de la Mairie** ⑫, vers le nord, jusqu'à Rond-point de la Poste **(E)**.
13. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ⑩, vers le sud-ouest, jusqu'à Place de l'Église **(H)**.
14. Il tourne à droite dans la **rue des Lilas** ⑬, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour Saint-Roch **(F)**.

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.