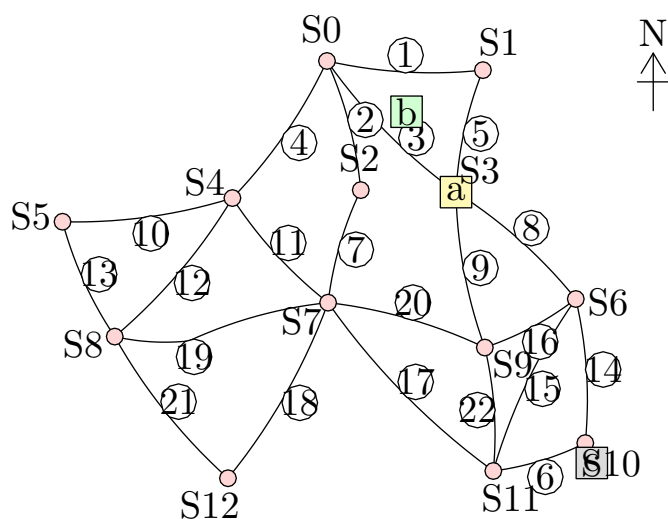


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① allée des Peupliers	⑫ rue Haute	S0 Carrefour de l'Hôpital	a la poste
② sentier des Prés	⑬ rue de la Poste	S1 Place des Tanneurs	b la bibliothèque
③ rue Neuve	⑭ chemin de Ronde	S2 Place Sainte-Croix	c le cimetière
④ rue du Puits	⑮ chemin Creux	S3 Carrefour du Moulin	
⑤ rue du Stade	⑯ rue des Jardins	S4 Carrefour de la Mairie	
⑥ boulevard du Parc	⑰ rue du Pont	S5 Place de la Fontaine	
⑦ chemin des Vignes	⑱ rue des Lilas	S6 Rond-point du Stade	
⑧ rue Basse	⑲ rue des Écoles	S7 Rond-point du Pont	
⑨ chemin du Lavoir	⑳ rue du Four	S8 Carrefour Saint-Roch	
⑩ allée des Tilleuls	21 quai aux Fleurs	S9 Carrefour du Lavoir	
⑪ passage du Marché	22 rue de l'Église	S10 Place de l'Église	
		S11 Rond-point de la Gare	
		S12 Place du Vieux-Puits	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



La tournée du facteur

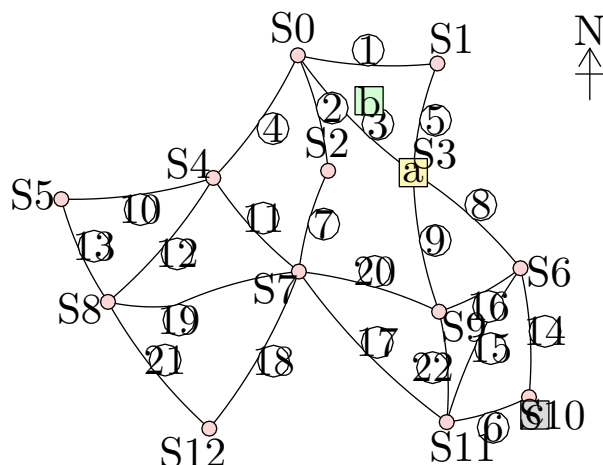
Problème — Fiche n°225



-
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
Nombre de rues	4	2	2	4	4	2	4	6	4	4	2	4	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $44 = 2 \times 22$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S3**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient même à la poste sans l'avoir cherché.



Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il part de Carrefour du Moulin (S3), prend la **rue Neuve** ③ vers le nord-ouest et atteint Carrefour de l'Hôpital (S0).
2. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ①, vers l'est, jusqu'à Place des Tanneurs (S1).
3. Il tourne à droite dans la **rue du Stade** ⑤, vers le sud, jusqu'à Carrefour du Moulin (S3).
4. Il tourne à gauche dans la **rue Basse** ⑧, vers le sud-est, jusqu'à Rond-point du Stade (S6).
5. Il continue tout droit dans le **chemin de Ronde** ⑭, vers le sud, jusqu'à Place de l'Église (S10).
6. Il tourne à droite dans le **boulevard du Parc** ⑥, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare (S11).
7. Il tourne à droite dans le **chemin Creux** ⑮, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Stade (S6).
8. Il prend dans la **rue des Jardins** ⑯, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S9).
9. Il tourne à droite dans la **rue du Four** ⑳, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point du Pont (S7).
10. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ⑦, vers le nord, jusqu'à Place Sainte-Croix (S2).
11. Il continue tout droit dans le **sentier des Prés** ②, vers le nord, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S0).
12. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ④, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S4).
13. Il continue tout droit dans l'**allée des Tilleuls** ⑩, vers l'ouest, jusqu'à Place de la Fontaine (S5).
14. Il tourne à gauche dans la **rue de la Poste** ⑬, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (S8).
15. Il tourne à gauche dans la **rue Haute** ⑫, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S4).
16. Il tourne à droite dans le **passage du Marché** ⑪, vers le sud-est, jusqu'à Rond-point du Pont (S7).
17. Il tourne à droite dans la **rue des Lilas** ⑱, vers le sud-ouest, jusqu'à Place du Vieux-Puits (S12).
18. Il tourne à droite dans le **quai aux Fleurs** 21, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (S8).
19. Il tourne à droite dans la **rue des Écoles** ⑰, vers l'est, jusqu'à Rond-point du Pont (S7).
20. Il tourne à droite dans la **rue du Pont** ⑰, vers le sud-est, jusqu'à Rond-point de la Gare (S11).
21. Il tourne à gauche dans la **rue de l'Église** 22, vers le nord, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S9).
22. Il continue tout droit dans le **chemin du Lavoir** ⑨, vers le nord, jusqu'à Carrefour du Moulin (S3).

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.