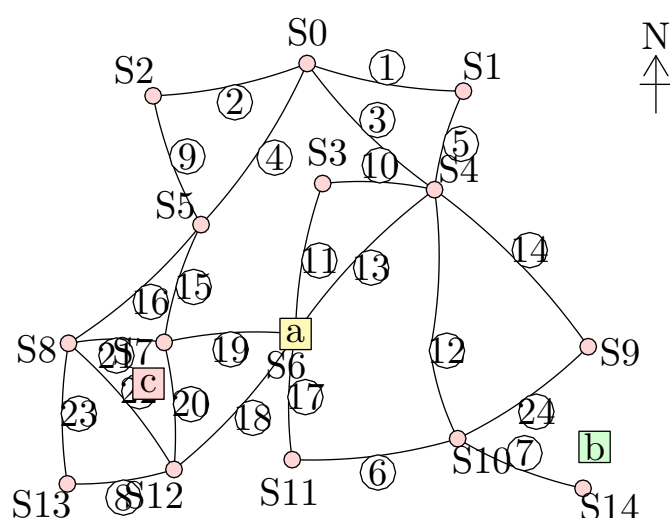


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue du Puits	⑬ rue de la Mairie	S0 Carrefour des Tilleuls	a la poste
② chemin des Vignes	⑭ venelle du Chat	S1 Place des Tanneurs	b la bibliothèque
③ quai aux Fleurs	⑮ allée des Tilleuls	S2 Place de la Fontaine	c la boulangerie
④ rue Pasteur	⑯ rue des Écoles	S3 Place de l'Église	
⑤ rue Verte	⑰ rue Neuve	S4 Rond-point du Stade	
⑥ rue des Jardins	⑱ rue de l'Église	S5 Carrefour du Lavoir	
⑦ impasse du Puits	⑲ chemin Creux	S6 Carrefour de l'Hôpital	
⑧ rue Basse	⑳ rue du Stade	S7 Carrefour de la Mairie	
⑨ rue Haute	21 rue du Moulin	S8 Carrefour des Quatre-Chemins	
⑩ rue des Lilas	22 chemin de Ronde	S9 Coin du Lavoir	
⑪ passage du Marché	23 rue de la Poste	S10 Rond-point de la Poste	
⑫ chemin du Lavoir	24 rue du Four	S11 Place du Marché	
		S12 Rond-point des Vaches	
		S13 Place Sainte-Croix	
		S14 Fontaine Notre-Dame	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.



La tournée du facteur

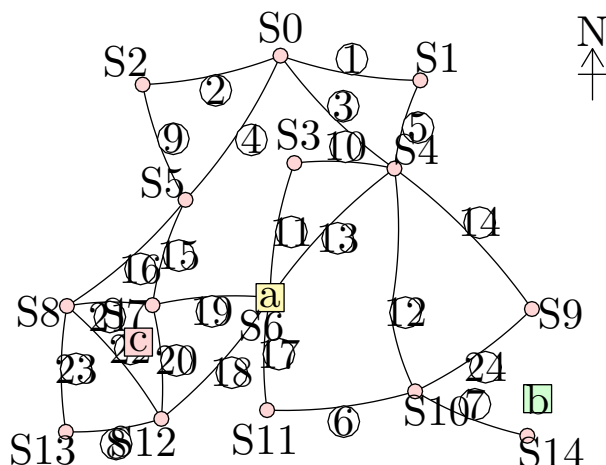
Problème — Fiche n°267



1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13
Nombre de rues	4	2	2	2	6	4	5	4	4	2	4	2	4	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $48 = 2 \times 24$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S6, S14 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S6**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, S6 et S14, et la poste est justement sur l'un des deux (S6). Il part donc de la poste et termine en S14, l'autre carrefour impair.



Voici une tournée possible :

1. Il part de Carrefour de l'Hôpital (S6), prend le **passage du Marché** ⑪ vers le nord et atteint Place de l'Église (S3).
2. Il tourne à droite dans la **rue des Lilas** ⑩, vers l'est, jusqu'à Rond-point du Stade (S4).
3. Il prend dans le **quai aux Fleurs** ③, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S0).
4. Il tourne à droite dans la **rue du Puits** ①, vers l'est, jusqu'à Place des Tanneurs (S1).
5. Il tourne à droite dans la **rue Verte** ⑤, vers le sud, jusqu'à Rond-point du Stade (S4).
6. Il continue tout droit dans le **chemin du Lavoir** ⑫, vers le sud, jusqu'à Rond-point de la Poste (S10).
7. Il tourne à droite dans la **rue des Jardins** ⑥, vers l'ouest, jusqu'à Place du Marché (S11).
8. Il tourne à droite dans la **rue Neuve** ⑰, vers le nord, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S6).
9. Il prend dans la **rue de l'Église** ⑱, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches (S12).
10. Il continue tout droit dans la **rue Basse** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Place Sainte-Croix (S13).
11. Il tourne à droite dans la **rue de la Poste** 23, vers le nord, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S8).
12. Il tourne à droite dans la **rue des Écoles** ⑯, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S5).
13. Il continue tout droit dans la **rue Pasteur** ④, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S0).
14. Il tourne à gauche dans le **chemin des Vignes** ②, vers l'ouest, jusqu'à Place de la Fontaine (S2).
15. Il tourne à gauche dans la **rue Haute** ⑨, vers le sud, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S5).
16. Il tourne à droite dans l'**allée des Tilleuls** ⑮, vers le sud, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S7).
17. Il continue tout droit dans la **rue du Stade** ⑳, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches (S12).
18. Il tourne à droite dans le **chemin de Ronde** 22, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S8).
19. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** 21, vers l'est, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S7).
20. Il continue tout droit dans le **chemin Creux** ⑲, vers l'est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S6).
21. Il tourne à gauche dans la **rue de la Mairie** ⑬, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Stade (S4).
22. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑭, vers le sud-est, jusqu'à Coin du Lavoir (S9).
23. Il tourne à droite dans la **rue du Four** 24, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point de la Poste (S10).
24. Il tourne à gauche dans l'**impasse du Puits** ⑦, vers l'est, jusqu'à Fontaine Notre-Dame (S14).

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en S6 ou en S14 : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.