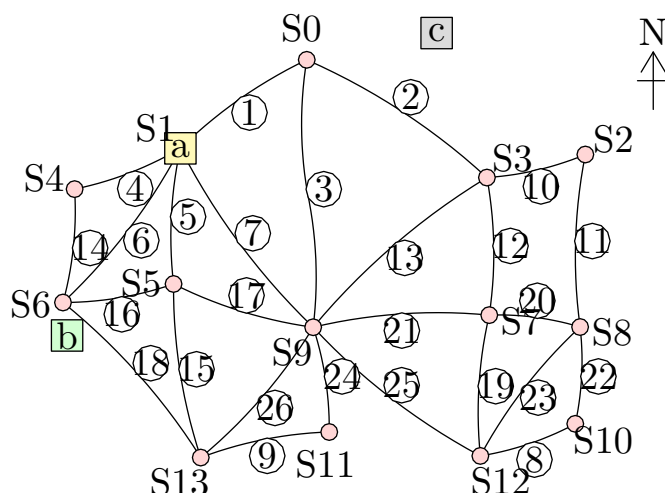


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① chemin Creux	⑭ rue de la Poste	S0 Carrefour des Quatre-Chemins	a la poste
② allée des Tilleuls	⑮ rue du Stade	S1 Carrefour du Lavoir	b la salle des fêtes
③ chemin du Lavoir	⑯ rue du Pont	S2 Place du Vieux-Puits	c le stade
④ rue Verte	⑰ rue des Lilas	S3 Carrefour de la Mairie	
⑤ rue Neuve	⑱ boulevard du Parc	S4 Place du Marché	
⑥ rue du Moulin	⑲ allée des Peupliers	S5 Rond-point de la Gare	
⑦ rue des Jardins	⑳ rue de l'Église	S6 Rond-point des Vaches	
⑧ venelle du Chat	21 avenue de la Gare	S7 Carrefour du Moulin	
⑨ rue de la Mairie	22 rue Pasteur	S8 Carrefour Saint-Roch	
⑩ sentier des Prés	23 rue Basse	S9 Rond-point du Pont	
⑪ quai aux Fleurs	24 rue des Écoles	S10 Place aux Herbes	
⑫ rue du Puits	25 rue Haute	S11 Coin du Lavoir	
⑬ chemin des Vignes	26 passage du Marché	S12 Carrefour de l'Hôpital	
		S13 Carrefour des Tilleuls	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°27

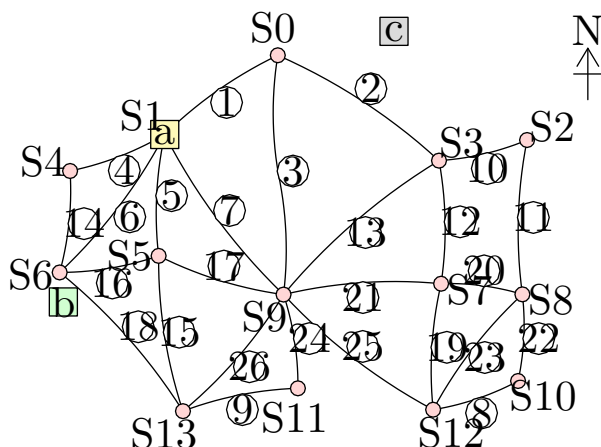


-
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?



Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13
Nombre de rues	3	5	2	4	2	4	4	4	4	8	2	2	4	4
Parité	impair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $52 = 2 \times 26$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S0, S1 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S1**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, S0 et S1, et la poste est justement sur l'un des deux (S1). Il part donc de la poste et termine en S0, l'autre carrefour impair.



Voici une tournée possible :

1. Il part de Carrefour du Lavoir (S1), prend le **chemin Creux** ① vers le nord-est et atteint Carrefour des Quatre-Chemins (S0).
2. Il tourne à droite dans l'**allée des Tilleuls** ②, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S3).
3. Il tourne à gauche dans le **sentier des Prés** ⑩, vers l'est, jusqu'à Place du Vieux-Puits (S2).
4. Il tourne à droite dans le **quai aux Fleurs** ⑪, vers le sud, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (S8).
5. Il tourne à droite dans la **rue de l'Église** ②①, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin (S7).
6. Il tourne à droite dans la **rue du Puits** ⑫, vers le nord, jusqu'à Carrefour de la Mairie (S3).
7. Il tourne à gauche dans le **chemin des Vignes** ⑬, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point du Pont (S9).
8. Il tourne à droite dans la **rue des Jardins** ⑦, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S1).
9. Il tourne à gauche dans la **rue Verte** ④, vers l'ouest, jusqu'à Place du Marché (S4).
10. Il tourne à gauche dans la **rue de la Poste** ⑭, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches (S6).
11. Il tourne à gauche dans la **rue du Moulin** ⑥, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S1).
12. Il prend dans la **rue Neuve** ⑤, vers le sud, jusqu'à Rond-point de la Gare (S5).
13. Il continue tout droit dans la **rue du Stade** ⑮, vers le sud, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S13).
14. Il tourne à gauche dans la **rue de la Mairie** ⑨, vers l'est, jusqu'à Coin du Lavoir (S11).
15. Il tourne à gauche dans la **rue des Écoles** 24, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Pont (S9).
16. Il tourne à gauche dans la **rue des Lilas** ⑰, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare (S5).
17. Il tourne à gauche dans la **rue du Pont** ⑯, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches (S6).
18. Il tourne à gauche dans le **boulevard du Parc** ⑱, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S13).
19. Il tourne à gauche dans le **passage du Marché** 26, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Pont (S9).
20. Il tourne à droite dans l'**avenue de la Gare** 21, vers l'est, jusqu'à Carrefour du Moulin (S7).
21. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ⑲, vers le sud, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S12).
22. Il tourne à gauche dans la **venelle du Chat** ⑧, vers l'est, jusqu'à Place aux Herbes (S10).
23. Il tourne à gauche dans la **rue Pasteur** 22, vers le nord, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (S8).
24. Il tourne à gauche dans la **rue Basse** 23, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S12).
25. Il tourne à droite dans la **rue Haute** 25, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point du Pont (S9).
26. Il tourne à droite dans le **chemin du Lavoir** ③, vers le nord, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S0).

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en S0 ou en S1 : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.