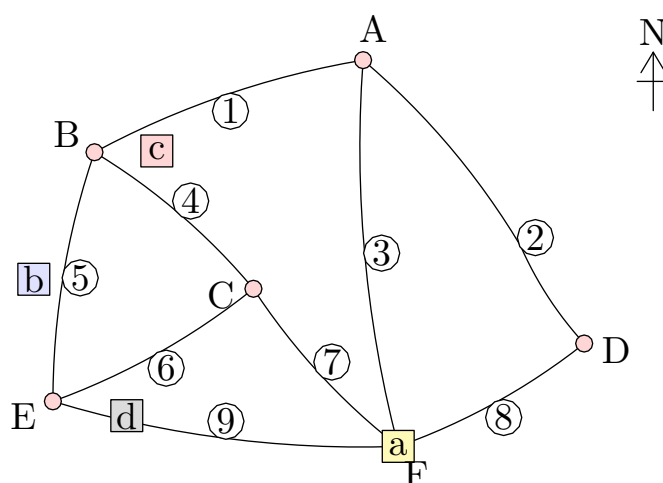




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

## La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

| Les rues        |                      | Les carrefours                 | Les bâtiments       |
|-----------------|----------------------|--------------------------------|---------------------|
| ① rue des Lilas | ⑥ rue Pasteur        | Ⓐ Carrefour du Lavoir          | <b>a</b> la poste   |
| ② rue du Pont   | ⑦ chemin du Lavoir   | Ⓑ Carrefour du Moulin          | <b>b</b> l'école    |
| ③ rue Neuve     | ⑧ allée des Tilleuls | Ⓒ Carrefour de la Mairie       | <b>c</b> le lavoir  |
| ④ rue du Moulin | ⑨ rue Haute          | Ⓓ Place du Vieux-Puits         | <b>d</b> le gymnase |
| ⑤ chemin Creux  |                      | Ⓔ Carrefour des Quatre-Chemins |                     |
|                 |                      | Ⓕ Rond-point de la Gare        |                     |

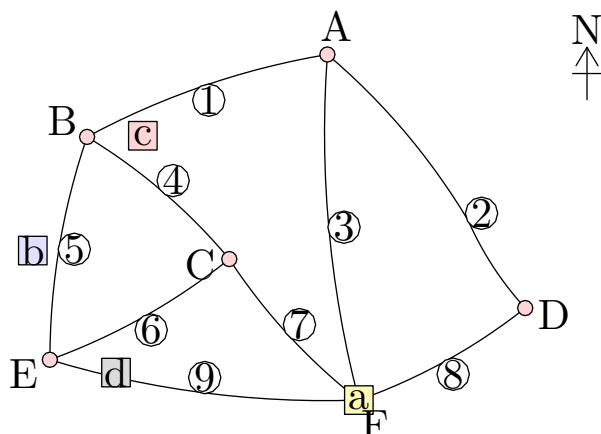
### Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

## Correction

### La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

| Carrefour      | A      | B      | C      | D    | E      | F    |
|----------------|--------|--------|--------|------|--------|------|
| Nombre de rues | 3      | 3      | 3      | 2    | 3      | 4    |
| Parité         | impair | impair | impair | pair | impair | pair |

Vérification : la somme de ces nombres vaut  $18 = 2 \times 9$ , car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

**Les carrefours à nombre impair de rues sont : A, B, C, E — il y en a 4.**

2.

**Le raisonnement clé.** Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

**Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».**

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **F**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

**Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (A, B, C, E).**

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

**Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.**

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

**Combien de rues en double, au minimum ?** Il faut appairer les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.