La tournée du facteur

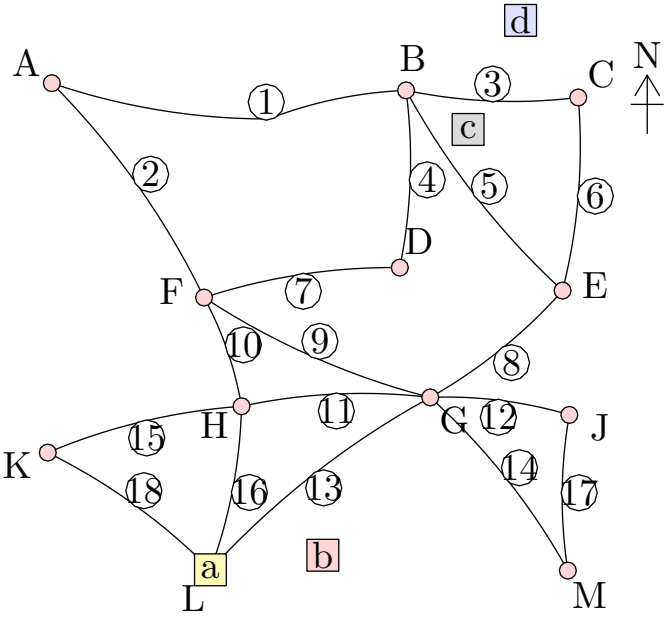
Problème — Fiche n°297

EULC0297

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue des Lilas	⑩ rue Verte	Ⓐ Place du Marché	**a** la poste
② rue Haute	⑪ rue du Stade	Ⓑ Rond-point du Stade	**b** le marché couvert
③ rue de l'Église	⑫ allée des Peupliers	Ⓒ Fontaine Notre-Dame	**c** l'église
④ rue de la Poste	⑬ chemin Creux	Ⓓ Place Sainte-Croix	**d** l'école
⑤ boulevard du Parc	⑭ rue du Moulin	Ⓔ Rond-point du Pont	
⑥ rue du Four	⑮ chemin du Lavoir	Ⓕ Rond-point des Vaches	
⑦ rue de la Mairie	⑯ sentier des Prés	Ⓖ Carrefour des Tilleuls	
⑧ rue Pasteur	⑰ quai aux Fleurs	Ⓗ Carrefour Saint-Roch	
⑨ rue Neuve	⑱ rue du Puits	Ⓙ Placette des Ormes	
		Ⓚ Coin du Lavoir	
		Ⓛ Carrefour de l'Hôpital	
		Ⓜ Place de l'Église	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.

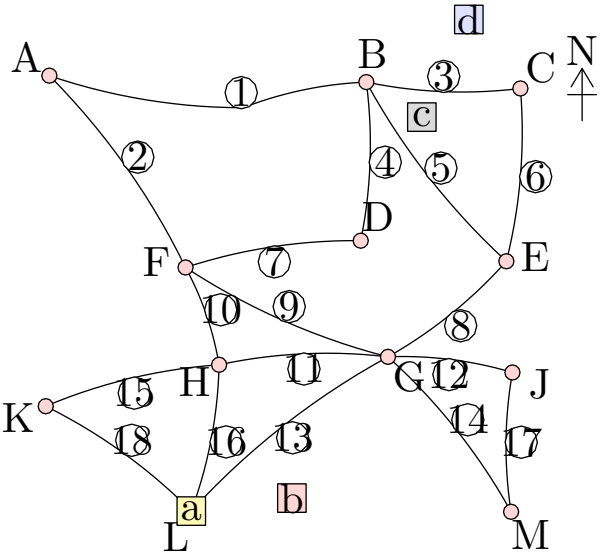
La tournée du facteur

Problème — Fiche n°297

2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M
Nombre de rues	2	4	2	2	3	4	6	4	2	2	3	2
Parité	pair	pair	pair	pair	**impair**	pair	pair	pair	pair	pair	**impair**	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $36 = 2 \times 18$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : E, L — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **L**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, E et L, et la poste est justement sur l'un des deux (L). Il part donc de la poste et termine en E, l'autre carrefour impair.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°297

Voici une tournée possible :

1. Il part de Carrefour de l'Hôpital **(L)**, prend le **chemin Creux** ⑬ vers le nord-est et atteint Carrefour des Tilleuls **(G)**.
2. Il continue tout droit dans la **rue Pasteur** ⑧, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Pont **(E)**.
3. Il tourne à gauche dans le **boulevard du Parc** ⑤, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point du Stade **(B)**.
4. Il tourne à gauche dans la **rue des Lilas** ①, vers l'ouest, jusqu'à Place du Marché **(A)**.
5. Il prend dans la **rue Haute** ②, vers le sud-est, jusqu'à Rond-point des Vaches **(F)**.
6. Il continue tout droit dans la **rue Neuve** ⑨, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(G)**.
7. Il continue tout droit dans l'**allée des Peupliers** ⑫, vers l'est, jusqu'à Placette des Ormes **(J)**.
8. Il tourne à droite dans le **quai aux Fleurs** ⑰, vers le sud, jusqu'à Place de l'Église **(M)**.
9. Il prend dans la **rue du Moulin** ⑭, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(G)**.
10. Il tourne à gauche dans la **rue du Stade** ⑪, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour Saint-Roch **(H)**.
11. Il continue tout droit dans le **chemin du Lavoir** ⑮, vers l'ouest, jusqu'à Coin du Lavoir **(K)**.
12. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ⑱, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(L)**.
13. Il tourne à gauche dans le **sentier des Prés** ⑯, vers le nord, jusqu'à Carrefour Saint-Roch **(H)**.
14. Il continue tout droit dans la **rue Verte** ⑩, vers le nord, jusqu'à Rond-point des Vaches **(F)**.
15. Il tourne à droite dans la **rue de la Mairie** ⑦, vers l'est, jusqu'à Place Sainte-Croix **(D)**.
16. Il tourne à gauche dans la **rue de la Poste** ④, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Stade **(B)**.
17. Il tourne à droite dans la **rue de l'Église** ③, vers l'est, jusqu'à Fontaine Notre-Dame **(C)**.
18. Il tourne à droite dans la **rue du Four** ⑥, vers le sud, jusqu'à Rond-point du Pont **(E)**.

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en E ou en L : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.