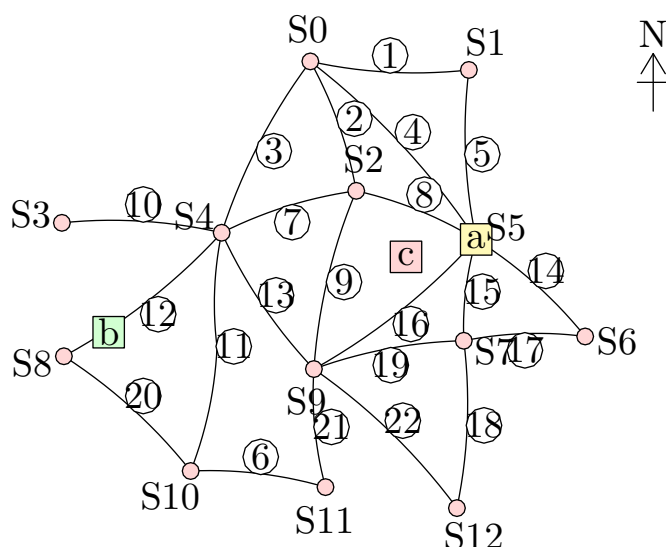


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue de la Poste	⑫ rue Neuve	S0 Carrefour de l'Hôpital	a la poste
② rue des Jardins	⑬ rue des Écoles	S1 Place aux Herbes	b la salle des fêtes
③ avenue de la Gare	⑭ rue Basse	S2 Carrefour Saint-Roch	c le marché couvert
④ rue du Stade	⑮ chemin des Vignes	S3 Place du Vieux-Puits	
⑤ allée des Peupliers	⑯ rue Pasteur	S4 Carrefour des Tilleuls	
⑥ rue du Four	⑰ rue de l'Église	S5 Rond-point de la Gare	
⑦ rue Haute	⑱ venelle du Chat	S6 Placette des Ormes	
⑧ quai aux Fleurs	⑲ rue des Lilas	S7 Rond-point de la Poste	
⑨ chemin de Ronde	⑳ passage du Marché	S8 Place des Tanneurs	
⑩ impasse des Roses	21 allée des Tilleuls	S9 Rond-point du Stade	
⑪ chemin du Lavoir	22 rue du Pont	S10 Carrefour du Moulin	
		S11 Place de l'Église	
		S12 Coin du Lavoir	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



La tournée du facteur

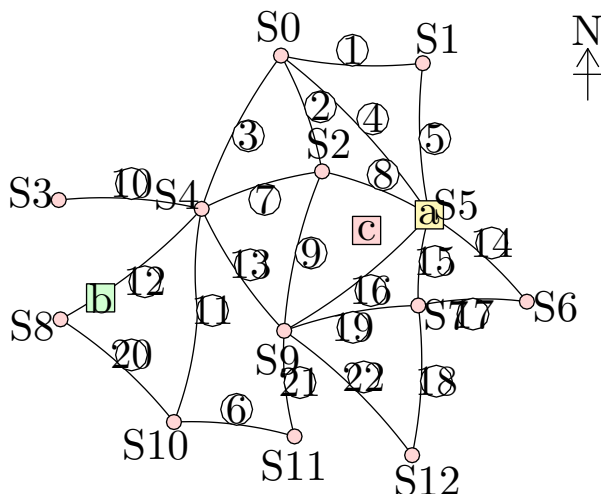
Problème — Fiche n°306



-
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
Nombre de rues	4	2	4	1	6	6	2	4	2	6	3	2	2
Parité	pair	pair	pair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	impair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $44 = 2 \times 22$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S3, S10 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S5**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, S3 et S10 : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Or la poste est en **S5**, où aboutit un nombre **pair** de rues. Ce carrefour ne peut être que traversé, jamais servir de départ.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de S3 à S10. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.



Ce parcours, en partant de S3 :

1. Il part de Place du Vieux-Puits (**S3**), prend l'**impasse des Roses** ⑩ vers l'est et atteint Carrefour des Tilleuls (**S4**).
2. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ③, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (**S0**).
3. Il tourne à droite dans la **rue de la Poste** ①, vers l'est, jusqu'à Place aux Herbes (**S1**).
4. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ⑤, vers le sud, jusqu'à Rond-point de la Gare (**S5**).
5. Il prend dans la **rue du Stade** ④, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (**S0**).
6. Il prend dans la **rue des Jardins** ②, vers le sud, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (**S2**).
7. Il tourne à droite dans la **rue Haute** ⑦, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (**S4**).
8. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ⑪, vers le sud, jusqu'à Carrefour du Moulin (**S10**).
9. Il tourne à gauche dans la **rue du Four** ⑥, vers l'est, jusqu'à Place de l'Église (**S11**).
10. Il tourne à gauche dans l'**allée des Tilleuls** 21, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Stade (**S9**).
11. Il continue tout droit dans le **chemin de Ronde** ⑨, vers le nord, jusqu'à Carrefour Saint-Roch (**S2**).
12. Il tourne à droite dans le **quai aux Fleurs** ⑧, vers l'est, jusqu'à Rond-point de la Gare (**S5**).
13. Il continue tout droit dans la **rue Basse** ⑭, vers le sud-est, jusqu'à Placette des Ormes (**S6**).
14. Il tourne à droite dans la **rue de l'Église** ⑰, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point de la Poste (**S7**).
15. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ⑮, vers le nord, jusqu'à Rond-point de la Gare (**S5**).
16. Il prend dans la **rue Pasteur** ⑯, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point du Stade (**S9**).
17. Il prend dans la **rue des Lilas** ⑱, vers l'est, jusqu'à Rond-point de la Poste (**S7**).
18. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑱, vers le sud, jusqu'à Coin du Lavoir (**S12**).
19. Il tourne à droite dans la **rue du Pont** 22, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point du Stade (**S9**).
20. Il continue tout droit dans la **rue des Écoles** ⑬, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (**S4**).
21. Il tourne à gauche dans la **rue Neuve** ⑫, vers le sud-ouest, jusqu'à Place des Tanneurs (**S8**).
22. Il tourne à gauche dans le **passage du Marché** ⑳, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour du Moulin (**S10**).

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.