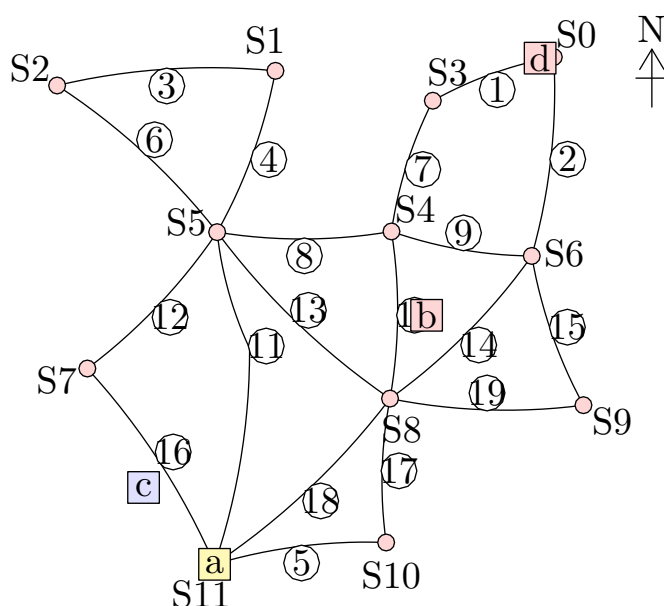


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue des Lilas	⑪ rue Neuve	S0 Place de l'Église	a la poste
② chemin de Ronde	⑫ allée des Peupliers	S1 Fontaine Notre-Dame	b le marché couvert
③ rue de la Poste	⑬ rue des Jardins	S2 Place Sainte-Croix	c l'école
④ chemin Creux	⑭ rue Pasteur	S3 Place des Tanneurs	d la pharmacie
⑤ rue des Écoles	⑮ sentier des Prés	S4 Carrefour des Quatre-Chemins	
⑥ avenue de la Gare	⑯ passage du Marché	S5 Carrefour de l'Hôpital	
⑦ chemin des Vignes	⑰ rue du Puits	S6 Rond-point de la Poste	
⑧ quai aux Fleurs	⑱ rue de la Mairie	S7 Coin du Lavoir	
⑨ rue Haute	⑲ venelle du Chat	S8 Carrefour du Lavoir	
⑩ rue du Stade		S9 Placette des Ormes	
		S10 Place du Vieux-Puits	
		S11 Rond-point des Vaches	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.



La tournée du facteur

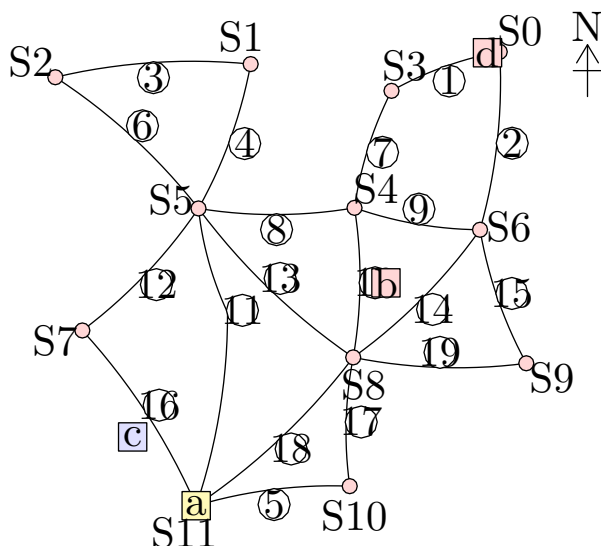
Problème — Fiche n°335



-
1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
 2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Nombre de rues	2	2	2	2	4	6	4	2	6	2	2	4
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $38 = 2 \times 19$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S11**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient même à la poste sans l'avoir cherché.



Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il part de Rond-point des Vaches (S11), prend la **rue des Écoles** ⑤ vers l'est et atteint Place du Vieux-Puits (S10).
2. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ⑰, vers le nord, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S8).
3. Il continue tout droit dans la **rue du Stade** ⑩, vers le nord, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S4).
4. Il continue tout droit dans le **chemin des Vignes** ⑦, vers le nord, jusqu'à Place des Tanneurs (S3).
5. Il tourne à droite dans la **rue des Lilas** ①, vers l'est, jusqu'à Place de l'Église (S0).
6. Il tourne à droite dans le **chemin de Ronde** ②, vers le sud, jusqu'à Rond-point de la Poste (S6).
7. Il tourne à droite dans la **rue Haute** ⑨, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (S4).
8. Il continue tout droit dans le **quai aux Fleurs** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S5).
9. Il tourne à droite dans le **chemin Creux** ④, vers le nord, jusqu'à Fontaine Notre-Dame (S1).
10. Il tourne à gauche dans la **rue de la Poste** ③, vers l'ouest, jusqu'à Place Sainte-Croix (S2).
11. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ⑥, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S5).
12. Il continue tout droit dans la **rue Neuve** ⑪, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches (S11).
13. Il tourne à droite dans le **passage du Marché** ⑱, vers le nord-ouest, jusqu'à Coin du Lavoir (S7).
14. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ⑫, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (S5).
15. Il tourne à droite dans la **rue des Jardins** ⑬, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S8).
16. Il tourne à gauche dans la **rue Pasteur** ⑭, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point de la Poste (S6).
17. Il tourne à droite dans le **sentier des Prés** ⑮, vers le sud, jusqu'à Placette des Ormes (S9).
18. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑲, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour du Lavoir (S8).
19. Il tourne à gauche dans la **rue de la Mairie** ⑱, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches (S11).

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.