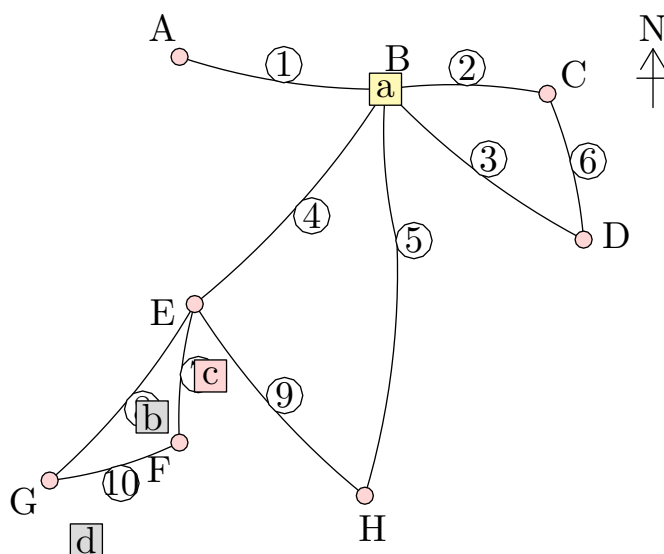




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① impasse du Puits	⑥ boulevard du Parc	Ⓐ Place aux Herbes	a la poste
② rue Verte	⑦ rue de la Mairie	Ⓑ Rond-point de la Gare	b le cimetière
③ rue de la Poste	⑧ rue des Lilas	Ⓒ Place de l'Église	c la boulangerie
④ rue du Four	⑨ chemin des Vignes	Ⓓ Place Sainte-Croix	d l'église
⑤ rue du Moulin	⑩ chemin de Ronde	Ⓔ Rond-point des Vaches	
		Ⓕ Place du Marché	
		Ⓖ Place de la Fontaine	
		Ⓗ Place du Vieux-Puits	

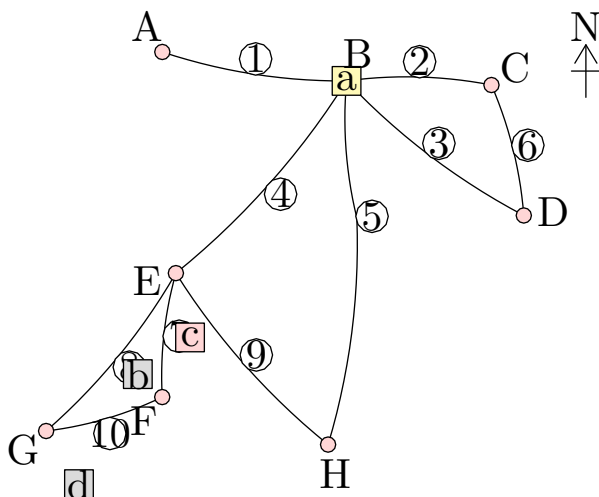
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

- Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
- Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
- Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ? Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
- Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de rues	1	5	2	2	4	2	2	2
Parité	impair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $20 = 2 \times 10$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : A, B — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en B, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, A et B, et la poste est justement sur l'un des deux (B). Il part donc de la poste et termine en A, l'autre carrefour impair.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°372



Voici une tournée possible :

1. Il part de Rond-point de la Gare **(B)**, prend la **rue Verte** ② vers l'est et atteint Place de l'Église **(C)**.
2. Il tourne à droite dans le **boulevard du Parc** ⑥, vers le sud, jusqu'à Place Sainte-Croix **(D)**.
3. Il tourne à droite dans la **rue de la Poste** ③, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare **(B)**.
4. Il tourne à gauche dans la **rue du Four** ④, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches **(E)**.
5. Il tourne à gauche dans la **rue de la Mairie** ⑦, vers le sud, jusqu'à Place du Marché **(F)**.
6. Il tourne à droite dans le **chemin de Ronde** ⑩, vers l'ouest, jusqu'à Place de la Fontaine **(G)**.
7. Il tourne à droite dans la **rue des Lilas** ⑧, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point des Vaches **(E)**.
8. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ⑨, vers le sud-est, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(H)**.
9. Il tourne à gauche dans la **rue du Moulin** ⑤, vers le nord, jusqu'à Rond-point de la Gare **(B)**.
10. Il tourne à gauche dans l'**impasse du Puits** ①, vers l'ouest, jusqu'à Place aux Herbes **(A)**.

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en A ou en B : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.