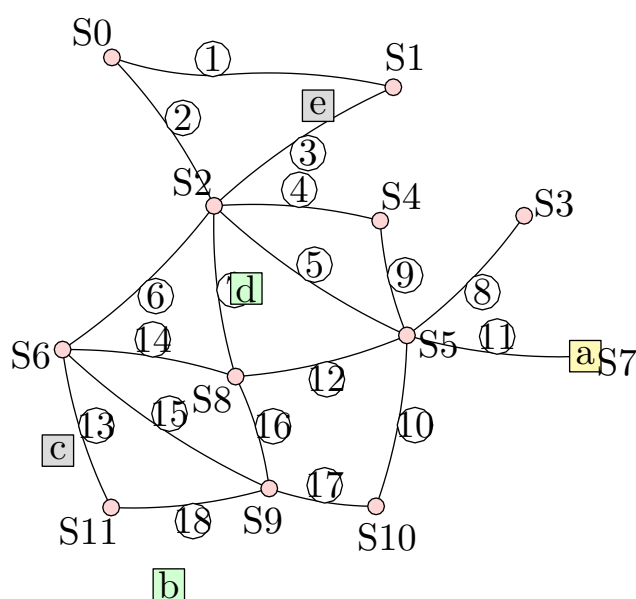


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① venelle du Chat	⑩ quai aux Fleurs	S0 Place du Vieux-Puits	a la poste
② allée des Tilleuls	⑪ impasse des Cerisiers	S1 Place aux Herbes	b la mairie
③ rue Neuve	⑫ rue de l'Église	S2 Rond-point de la Gare	c le stade
④ rue de la Mairie	⑬ rue des Lilas	S3 Place des Tanneurs	d la salle des fêtes
⑤ chemin des Vignes	⑭ rue de la Poste	S4 Placette des Ormes	e l'église
⑥ boulevard du Parc	⑮ rue Basse	S5 Rond-point des Vaches	
⑦ avenue de la Gare	⑯ rue des Jardins	S6 Carrefour des Tilleuls	
⑧ impasse Sainte-Anne	⑰ rue Verte	S7 Place de l'Église	
⑨ rue Haute	⑱ rue du Moulin	S8 Rond-point du Pont	
		S9 Rond-point du Stade	
		S10 Place du Marché	
		S11 Coin du Lavoir	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°377

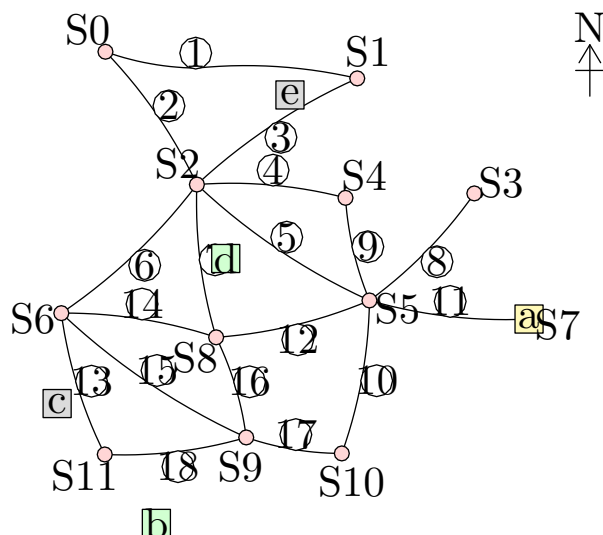


EULC0377

-
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Nombre de rues	2	2	6	1	2	6	4	1	4	4	2	2
Parité	pair	pair	pair	impair	pair	pair	pair	impair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $36 = 2 \times 18$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S3, S7 — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S7**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, S3 et S7, et la poste est justement sur l'un des deux (S7). Il part donc de la poste et termine en S3, l'autre carrefour impair.



Voici une tournée possible :

1. Il part de Place de l'Église (S7), prend l'impasse des Cerisiers ⑪ vers l'ouest et atteint Rond-point des Vaches (S5).
2. Il continue tout droit dans le chemin des Vignes ⑤, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare (S2).
3. Il continue tout droit dans l'allée des Tilleuls ②, vers le nord-ouest, jusqu'à Place du Vieux-Puits (S0).
4. Il prend dans la venelle du Chat ①, vers l'est, jusqu'à Place aux Herbes (S1).
5. Il tourne à droite dans la rue Neuve ③, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare (S2).
6. Il tourne à gauche dans la rue de la Mairie ④, vers l'est, jusqu'à Placette des Ormes (S4).
7. Il tourne à droite dans la rue Haute ⑨, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches (S5).
8. Il continue tout droit dans le quai aux Fleurs ⑩, vers le sud, jusqu'à Place du Marché (S10).
9. Il tourne à droite dans la rue Verte ⑰, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point du Stade (S9).
10. Il continue tout droit dans la rue Basse ⑮, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S6).
11. Il tourne à droite dans le boulevard du Parc ⑥, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point de la Gare (S2).
12. Il tourne à droite dans l'avenue de la Gare ⑦, vers le sud, jusqu'à Rond-point du Pont (S8).
13. Il tourne à droite dans la rue de la Poste ⑭, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (S6).
14. Il tourne à gauche dans la rue des Lilas ⑬, vers le sud, jusqu'à Coin du Lavoir (S11).
15. Il tourne à gauche dans la rue du Moulin ⑱, vers l'est, jusqu'à Rond-point du Stade (S9).
16. Il tourne à gauche dans la rue des Jardins ⑯, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Pont (S8).
17. Il tourne à droite dans la rue de l'Église ⑫, vers l'est, jusqu'à Rond-point des Vaches (S5).
18. Il continue tout droit dans l'impasse Sainte-Anne ⑧, vers le nord-est, jusqu'à Place des Tanneurs (S3).

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en S3 ou en S7 : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.