# La tournée du facteur

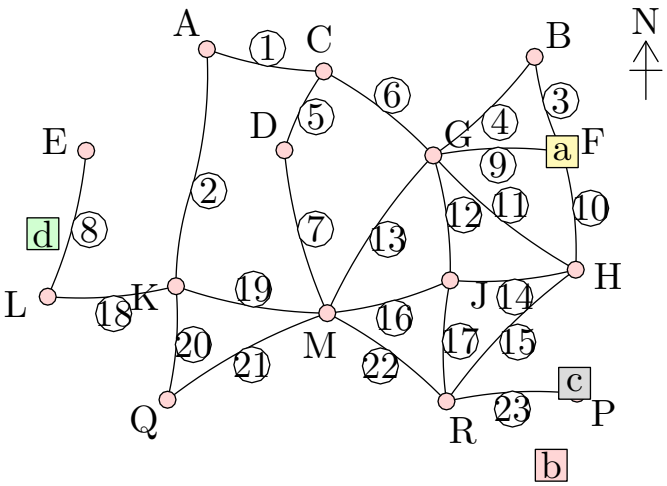
Problème — Fiche n°389

EULC0389

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

## La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.




**Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.**

| Les rues | | Les carrefours | Les bâtiments |
|---|---|---|---|
| ① rue des Jardins | ⑬ rue des Écoles | Ⓐ Place du Marché | **a** la poste |
| ② boulevard du Parc | ⑭ rue Pasteur | Ⓑ Place du Vieux-Puits | **b** la boulangerie |
| ③ rue de la Poste | ⑮ rue du Moulin | Ⓒ Carrefour des Tilleuls | **c** l'église |
| ④ allée des Peupliers | ⑯ rue Haute | Ⓓ Place de l'Église | **d** la gendarmerie |
| ⑤ avenue de la Gare | ⑰ rue du Stade | Ⓔ Place des Tanneurs | |
| ⑥ passage du Marché | ⑱ rue Neuve | Ⓕ Rond-point du Pont | |
| ⑦ venelle du Chat | ⑲ chemin des Vignes | Ⓖ Rond-point des Vaches | |
| ⑧ impasse du Vieux-Four | ⑳ rue Verte | Ⓗ Carrefour du Moulin | |
| ⑨ chemin Creux | ㉑ sentier des Prés | Ⓙ Rond-point de la Gare | |
| ⑩ quai aux Fleurs | ㉒ rue des Lilas | Ⓚ Rond-point du Stade | |
| ⑪ rue de l'Église | ㉓ impasse Verte | Ⓛ Place aux Herbes | |
| ⑫ allée des Tilleuls | | Ⓜ Carrefour des Quatre-Chemins | |
| | | Ⓟ Placette des Ormes | |
| | | Ⓠ Coin du Lavoir | |
| | | Ⓡ Carrefour de l'Hôpital | |

*Légende du plan*

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

# La tournée du facteur

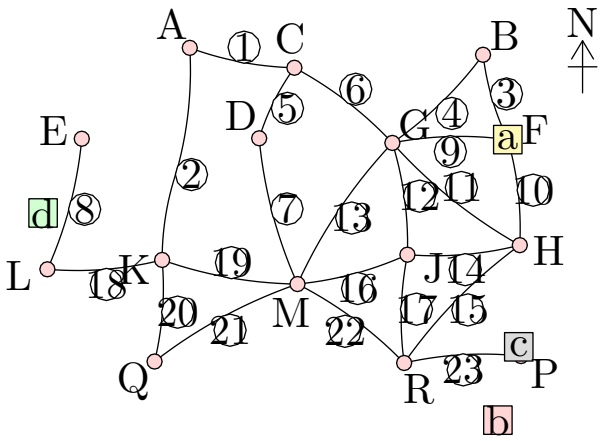
Problème — Fiche n°389

EULC0389

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

# Correction

## La tournée du facteur — Correction




**1.** On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

| Carrefour | A | B | C | D | E | F | G | H | J | K | L | M | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de rues | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 6 | 4 | 4 | 4 | 2 | 6 | 1 |
| Parité | pair | pair | **impair** | pair | **impair** | **impair** | pair | pair | pair | pair | pair | pair | **impair** |

Vérification : la somme de ces nombres vaut $46 = 2 \times 23$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

**Les carrefours à nombre impair de rues sont : C, E, F, P — il y en a 4.**

**2.**

**Le raisonnement clé.** Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

**Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».**

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **F**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

**3.**

**Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (C, E, F, P).**

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

**4.**

**Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.**

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

**Combien de rues en double, au minimum ?** Il faut apparier les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.

# La tournée du facteur

Problème — Fiche n°389

EULC0389

---

**À remarquer.** Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.