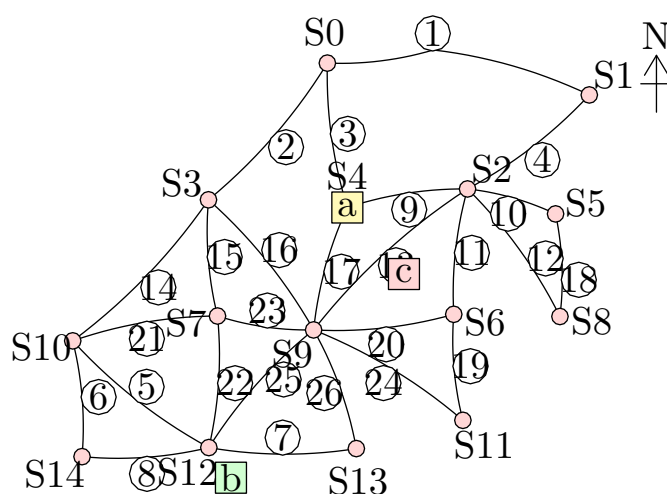


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue Haute	⑭ passage du Marché	S0 Rond-point de la Gare	a la poste
② rue des Écoles	⑮ chemin Creux	S1 Place de la Fontaine	b la mairie
③ quai aux Fleurs	⑯ rue du Four	S2 Carrefour Saint-Roch	c le lavoir
④ chemin des Vignes	⑰ rue Pasteur	S3 Carrefour des Tilleuls	
⑤ avenue de la Gare	⑱ rue du Puits	S4 Rond-point de la Poste	
⑥ boulevard du Parc	⑲ rue des Lilas	S5 Placette des Ormes	
⑦ rue du Stade	⑳ allée des Peupliers	S6 Rond-point des Vaches	
⑧ rue de l'Église	21 rue Neuve	S7 Carrefour du Lavoir	
⑨ venelle du Chat	22 rue des Jardins	S8 Place du Marché	
⑩ chemin de Ronde	23 allée des Tilleuls	S9 Carrefour de l'Hôpital	
⑪ rue du Pont	24 rue de la Mairie	S10 Carrefour du Moulin	
⑫ rue du Moulin	25 chemin du Lavoir	S11 Place de l'Église	
⑬ rue Verte	26 rue Basse	S12 Rond-point du Pont	
		S13 Place du Vieux-Puits	
		S14 Place aux Herbes	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.



La tournée du facteur

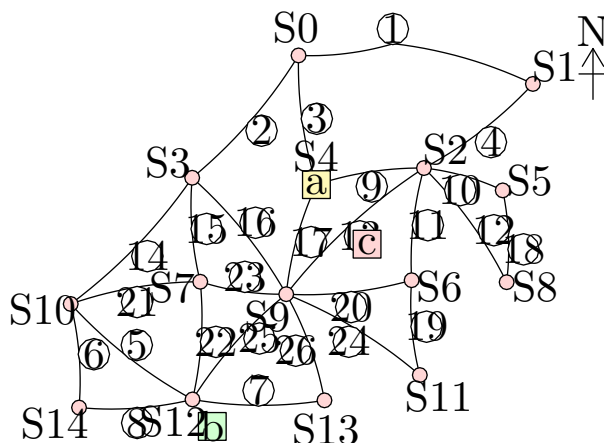
Problème — Fiche n°68



-
1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
 2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
 3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
 4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
Nombre de rues	3	2	6	4	3	2	3	4	2	8	4	2	5
Parité	impair	pair	pair	pair	impair	pair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $52 = 2 \times 26$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : S0, S4, S6, S12 — il y en a 4.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en S4, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (S0, S4, S6, S12).

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

Combien de rues en double, au minimum ? Il faut appairer les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.