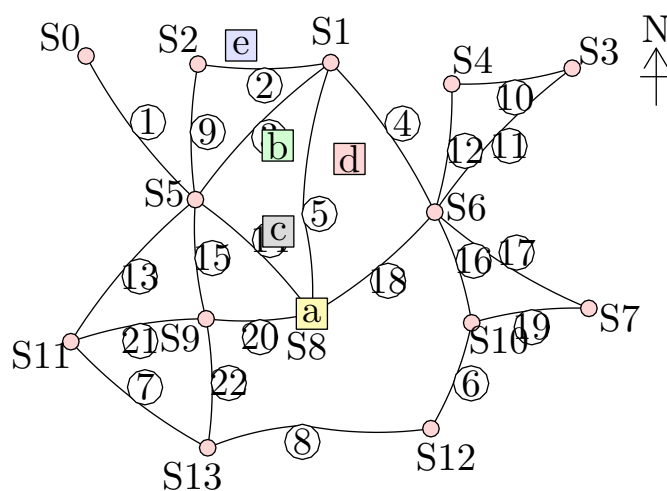


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

## La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

| Les rues                |                       | Les carrefours             | Les bâtiments            |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------|--------------------------|
| ① impasse du Vieux-Four | ⑫ rue du Puits        | S0 Coin du Lavoir          | <b>a</b> la poste        |
| ② chemin des Vignes     | ⑬ chemin Creux        | S1 Carrefour du Lavoir     | <b>b</b> la bibliothèque |
| ③ rue de l'Église       | ⑭ allée des Tilleuls  | S2 Place de l'Église       | <b>c</b> le stade        |
| ④ avenue de la Gare     | ⑮ rue du Four         | S3 Place de la Fontaine    | <b>d</b> la pharmacie    |
| ⑤ passage du Marché     | ⑯ rue des Écoles      | S4 Place des Tanneurs      | <b>e</b> l'école         |
| ⑥ rue des Jardins       | ⑰ chemin du Lavoir    | S5 Rond-point de la Gare   |                          |
| ⑦ rue Verte             | ⑱ allée des Peupliers | S6 Carrefour Saint-Roch    |                          |
| ⑧ rue du Stade          | ⑲ rue Neuve           | S7 Place aux Herbes        |                          |
| ⑨ rue du Moulin         | ⑳ rue de la Poste     | S8 Rond-point du Stade     |                          |
| ⑩ rue du Pont           | 21 chemin de Ronde    | S9 Carrefour des Tilleuls  |                          |
| ⑪ boulevard du Parc     | 22 rue Haute          | S10 Carrefour de la Mairie |                          |
|                         |                       | S11 Rond-point des Vaches  |                          |
|                         |                       | S12 Place Sainte-Croix     |                          |
|                         |                       | S13 Carrefour de l'Hôpital |                          |

### Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.



## La tournée du facteur

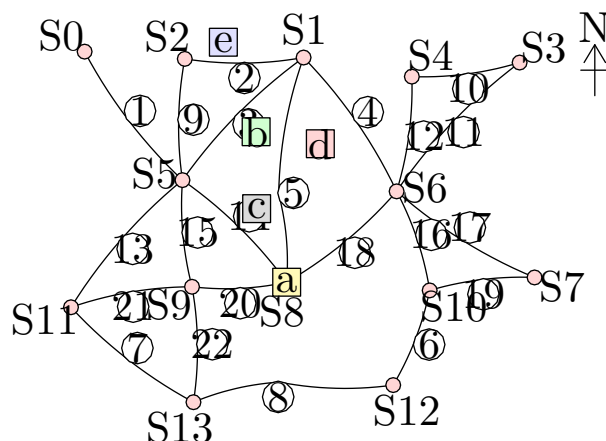
Problème — Fiche n°69



- 
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
  3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
  4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

## Correction

### La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

| Carrefour      | S0     | S1   | S2   | S3   | S4   | S5   | S6   | S7   | S8   | S9   | S10    | S11    | S12  |
|----------------|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|--------|------|
| Nombre de rues | 1      | 4    | 2    | 2    | 2    | 6    | 6    | 2    | 4    | 4    | 3      | 3      | 2    |
| Parité         | impair | pair | pair | pair | pair | pair | pair | pair | pair | pair | impair | impair | pair |

Vérification : la somme de ces nombres vaut  $44 = 2 \times 22$ , car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

**Les carrefours à nombre impair de rues sont : S0, S10, S11, S13 — il y en a 4.**

2.

**Le raisonnement clé.** Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

**Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».**

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **S8**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

**Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (S0, S10, S11, S13).**

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

**Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.**

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

**Combien de rues en double, au minimum ?** Il faut appairer les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.



## La tournée du facteur

Problème — Fiche n°69



---

**À remarquer.** Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.