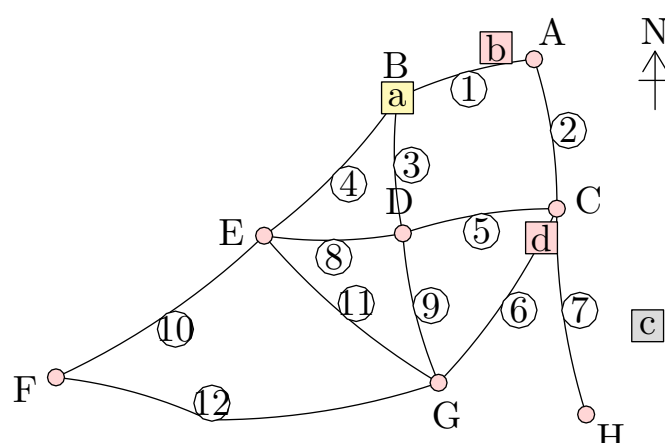


Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue des Écoles	⑦ impasse des Roses	(A) Fontaine Notre-Dame	a la poste
② avenue de la Gare	⑧ rue Verte	(B) Carrefour des Tilleuls	b la boulangerie
③ boulevard du Parc	⑨ rue Haute	(C) Rond-point du Pont	c le cimetière
④ rue du Puits	⑩ allée des Tilleuls	(D) Carrefour de l'Hôpital	d le marché couvert
⑤ rue du Moulin	⑪ rue de l'Église	(E) Rond-point des Vaches	
⑥ rue Basse	⑫ chemin du Lavoir	(F) Placette des Ormes	
		(G) Carrefour du Lavoir	
		(H) Place du Vieux-Puits	

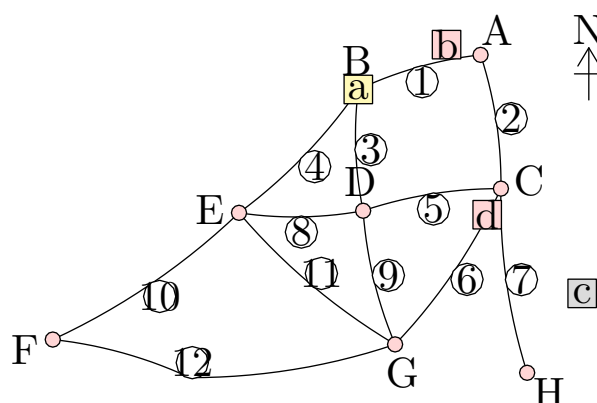
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

- Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
- Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
- Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ? Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
- Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de rues	2	3	4	4	4	2	4	1
Parité	pair	impair	pair	pair	pair	pair	pair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $24 = 2 \times 12$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : B, H — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **B**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Oui. Deux carrefours sont impairs, B et H, et la poste est justement sur l'un des deux (B). Il part donc de la poste et termine en H, l'autre carrefour impair.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°7



Voici une tournée possible :

1. Il part de Carrefour des Tilleuls (**B**), prend la **rue des Écoles** ① vers l'est et atteint Fontaine Notre-Dame (**A**).
2. Il tourne à droite dans l'**avenue de la Gare** ②, vers le sud, jusqu'à Rond-point du Pont (**C**).
3. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** ⑤, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (**D**).
4. Il tourne à droite dans le **boulevard du Parc** ③, vers le nord, jusqu'à Carrefour des Tilleuls (**B**).
5. Il prend dans la **rue du Puits** ④, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches (**E**).
6. Il tourne à gauche dans la **rue Verte** ⑧, vers l'est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital (**D**).
7. Il tourne à droite dans la **rue Haute** ⑨, vers le sud, jusqu'à Carrefour du Lavoir (**G**).
8. Il tourne à droite dans la **rue de l'Église** ⑪, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches (**E**).
9. Il tourne à gauche dans l'**allée des Tilleuls** ⑩, vers le sud-ouest, jusqu'à Placette des Ormes (**F**).
10. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ⑫, vers l'est, jusqu'à Carrefour du Lavoir (**G**).
11. Il continue tout droit dans la **rue Basse** ⑥, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Pont (**C**).
12. Il prend dans l'**impasse des Roses** ⑦, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits (**H**).

4.

C'était déjà possible. Notons seulement que la poste devait être en B ou en H : ailleurs, la tournée n'aurait pas pu commencer.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.