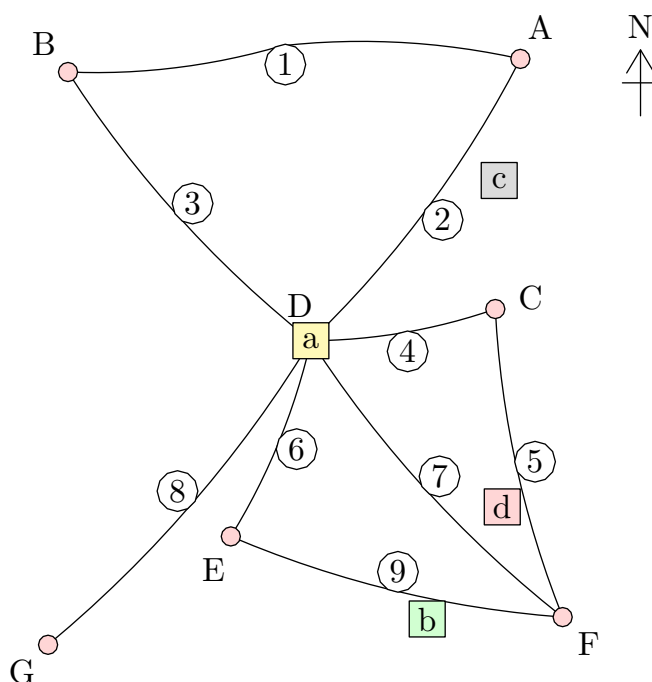




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① avenue de la Gare	⑥ rue du Moulin	Ⓐ Place aux Herbes	a la poste
② rue Basse	⑦ allée des Peupliers	Ⓑ Place de la Fontaine	b la gendarmerie
③ chemin du Lavoir	⑧ impasse du Puits	Ⓒ Place du Marché	c l'église
④ rue des Écoles	⑨ rue du Puits	Ⓓ Carrefour du Moulin	d la boulangerie
⑤ rue Verte		Ⓔ Placette des Ormes	
		Ⓕ Carrefour des Quatre-Chemins	
		Ⓖ Place de l'Église	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°82

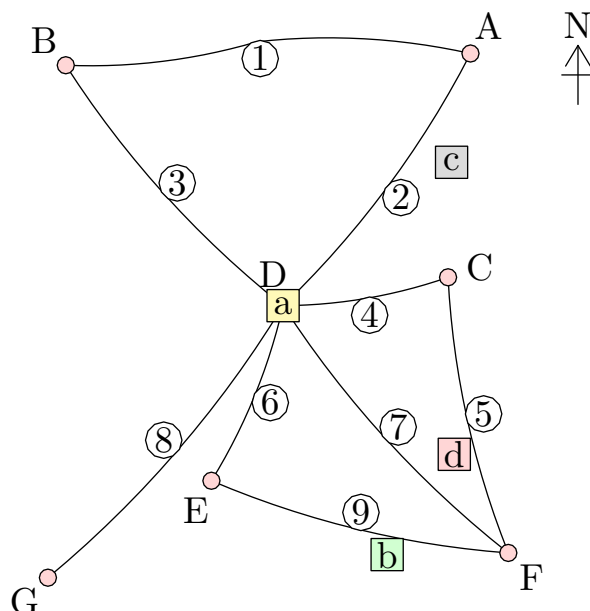


-
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?



Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G
Nombre de rues	2	2	2	6	2	3	1
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	impair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $18 = 2 \times 9$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : F, G — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **D**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'une **seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, F et G : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Or la poste est en **D**, où aboutit un nombre **pair** de rues. Ce carrefour ne peut être que traversé, jamais servir de départ.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de F à G. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.



La tournée du facteur

Problème — Fiche n°82



Ce parcours, en partant de F :

1. Il part de Carrefour des Quatre-Chemins (**F**), prend la **rue Verte** ⑤ vers le nord et atteint Place du Marché (**C**).
2. Il tourne à gauche dans la **rue des Écoles** ④, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin (**D**).
3. Il tourne à droite dans la **rue Basse** ②, vers le nord-est, jusqu'à Place aux Herbes (**A**).
4. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ①, vers l'ouest, jusqu'à Place de la Fontaine (**B**).
5. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ③, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour du Moulin (**D**).
6. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** ⑥, vers le sud, jusqu'à Placette des Ormes (**E**).
7. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ⑨, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins (**F**).
8. Il tourne à gauche dans l'**allée des Peupliers** ⑦, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin (**D**).
9. Il tourne à gauche dans l'**impasse du Puits** ⑧, vers le sud-ouest, jusqu'à Place de l'Église (**G**).

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.