La tournée du facteur

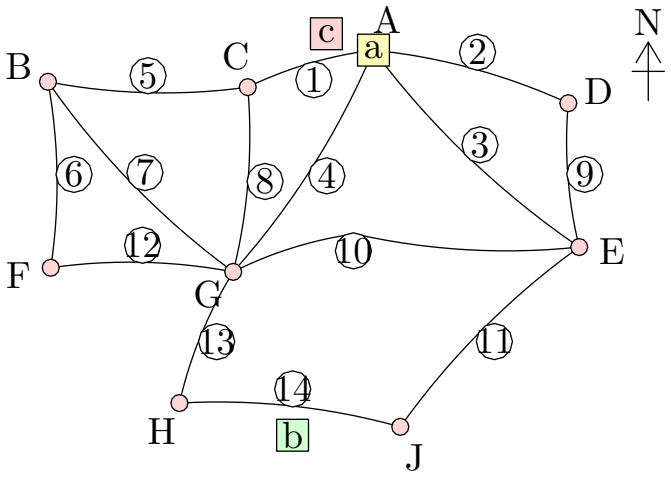
Problème — Fiche n°86

EULC0086

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste et doit emprunter chaque rue exactement une fois. Il n'est pas obligé d'y revenir : il termine sa tournée où il veut.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① chemin de Ronde	⑧ rue du Stade	Ⓐ Carrefour des Quatre-Chemins	**a** la poste
② chemin Creux	⑨ passage du Marché	Ⓑ Rond-point de la Gare	**b** la bibliothèque
③ rue du Four	⑩ rue du Moulin	Ⓒ Rond-point du Stade	**c** le lavoir
④ rue Verte	⑪ rue de la Mairie	Ⓓ Coin du Lavoir	
⑤ quai aux Fleurs	⑫ rue Neuve	Ⓔ Rond-point du Pont	
⑥ allée des Tilleuls	⑬ rue Pasteur	Ⓕ Place de l'Église	
⑦ rue de l'Église	⑭ rue des Écoles	Ⓖ Carrefour de l'Hôpital	
		Ⓗ Place du Vieux-Puits	
		Ⓙ Place Sainte-Croix	

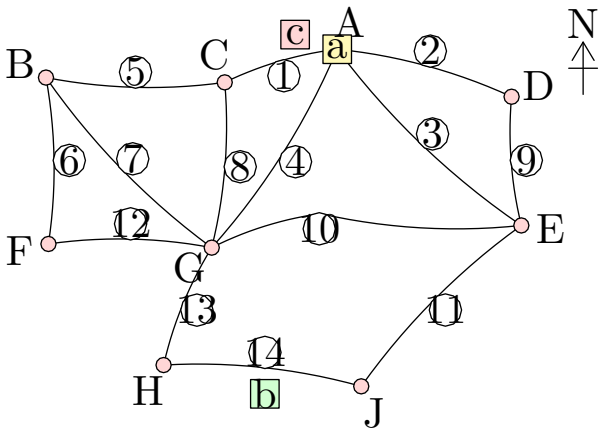
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée en partant de la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J
Nombre de rues	4	3	3	2	4	2	6	2	2
Parité	pair	**impair**	**impair**	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $28 = 2 \times 14$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : B, C — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **A**, et le facteur n'a pas à y revenir. Ce carrefour est donc le **départ** — il a droit d'être impair. Mais il n'y a qu'**une seule arrivée** : tous les autres carrefours doivent être pairs, sauf un au plus.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, B et C : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Or la poste est en **A**, où aboutit un nombre **pair** de rues. Ce carrefour ne peut être que traversé, jamais servir de départ.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de B à C. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°86

EULC0086

Ce parcours, en partant de B :

1. Il part de Rond-point de la Gare **(B)**, prend le **quai aux Fleurs** ⑤ vers l'est et atteint Rond-point du Stade **(C)**.
2. Il continue tout droit dans le **chemin de Ronde** ①, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins **(A)**.
3. Il continue tout droit dans le **chemin Creux** ②, vers l'est, jusqu'à Coin du Lavoir **(D)**.
4. Il tourne à droite dans le **passage du Marché** ⑨, vers le sud, jusqu'à Rond-point du Pont **(E)**.
5. Il tourne à droite dans la **rue du Four** ③, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins **(A)**.
6. Il tourne à gauche dans la **rue Verte** ④, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(G)**.
7. Il tourne à droite dans la **rue de l'Église** ⑦, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point de la Gare **(B)**.
8. Il prend dans l'**allée des Tilleuls** ⑥, vers le sud, jusqu'à Place de l'Église **(F)**.
9. Il tourne à gauche dans la **rue Neuve** ⑫, vers l'est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(G)**.
10. Il tourne à gauche dans la **rue du Moulin** ⑩, vers l'est, jusqu'à Rond-point du Pont **(E)**.
11. Il tourne à droite dans la **rue de la Mairie** ⑪, vers le sud-ouest, jusqu'à Place Sainte-Croix **(J)**.
12. Il tourne à droite dans la **rue des Écoles** ⑭, vers l'ouest, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(H)**.
13. Il tourne à droite dans la **rue Pasteur** ⑬, vers le nord, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(G)**.
14. Il continue tout droit dans la **rue du Stade** ⑧, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Stade **(C)**.