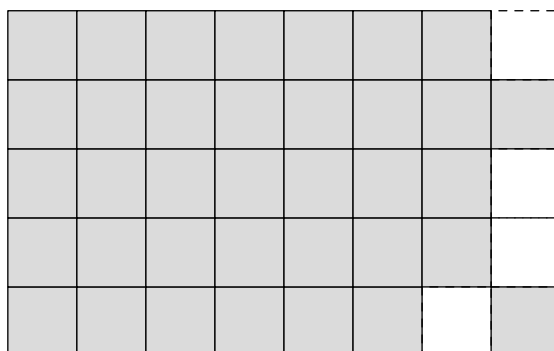




On a retiré quelques cases d'un damier. Peut-on recouvrir tout le reste avec des dominos, sans chevauchement ni débordement ? Quand c'est possible, il suffit de le montrer. Quand ça ne l'est pas, il faut le prouver — et c'est là que le problème devient intéressant.

## Le damier mutilé

On part d'un damier de **8 cases sur 5**. On en retire **4 cases** — celles dessinées en pointillés ci-dessous.



On dispose de **dominos** : chaque domino recouvre exactement **deux cases voisines**, côte à côte ou l'une au-dessus de l'autre. On veut recouvrir **toute** la partie grise, sans chevauchement, sans débordement, et sans laisser de case libre.

Les trois questions se suivent : la première se règle par un simple comptage, la dernière demande une véritable preuve.

1. **Combien de dominos** faudrait-il exactement ? Que se passe-t-il si ce nombre n'est pas entier ?
2. On colorie le damier comme un vrai échiquier, en alternant deux couleurs. **Combien reste-t-il de cases de chaque couleur ?** Que recouvre un domino, en termes de couleurs ?
3. **Le recouvrement est-il possible ?** Si oui, en proposer un. Si non, le **démontrer**.



## Correction

### Le damier mutilé — Correction

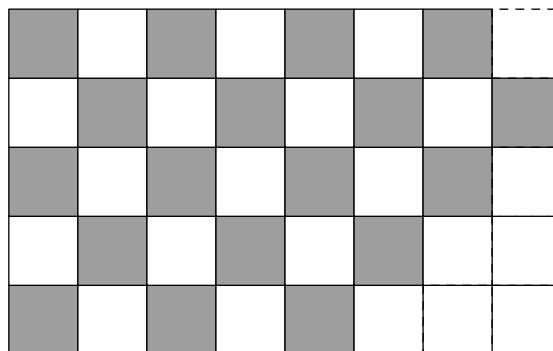
**L'idée maîtresse.** Montrer qu'un pavage existe est facile : il suffit d'en exhiber un. Montrer qu'il n'en existe **aucun** est d'une autre nature — on ne peut pas essayer toutes les dispositions. Il faut trouver une **quantité qui ne change jamais** quand on pose un domino, et constater qu'elle interdit la situation voulue.

1. Le damier complet compte  $8 \times 5 = 40$  cases, dont on retire 4 : il en reste **36**.

Nombre de dominos nécessaires :  $\frac{36}{2} = 18$

**Il faudrait exactement 18 dominos — le compte tombe juste, rien ne s'oppose encore au pavage.**

2. Colorions le damier :



*Le damier colorié comme un échiquier.*

**Il reste 18 cases sombres et 18 cases claires.**

**Ce que fait un domino.** Deux cases voisines n'ont jamais la même couleur sur un damier. Donc **tout domino couvre exactement une case sombre et une case claire** — c'est vrai quelle que soit sa position, horizontale ou verticale. C'est l'invariant cherché.

3.

**Impossible — et cette fois le coloriage ne suffit pas : les deux couleurs sont en nombre égal (18 et 18). Il faut regarder la forme du plateau.**

**La case (8 ; 1) est isolée : aucune de ses voisines n'appartient au plateau. Aucun domino ne peut donc la couvrir, puisqu'un domino a besoin de deux cases voisines.**

**La leçon la plus importante de ce problème :** l'équilibre des couleurs est une condition **nécessaire**, elle n'est pas **suffisante**. Un invariant qui ne s'oppose à rien ne prouve pas que la chose est possible — il faut alors exhiber une solution, ou trouver un autre obstacle.

**À retenir.** Pour prouver qu'une construction est impossible, on cherche une quantité que chaque étape laisse inchangée — ici, l'écart entre le nombre de cases sombres et claires, qu'un domino ne modifie jamais. Ce raisonnement par invariant sert bien au-delà des dominos.