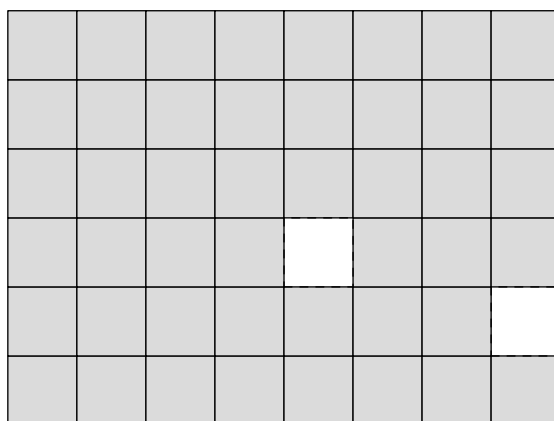




On a retiré quelques cases d'un damier. Peut-on recouvrir tout le reste avec des dominos, sans chevauchement ni débordement ? Quand c'est possible, il suffit de le montrer. Quand ça ne l'est pas, il faut le prouver — et c'est là que le problème devient intéressant.

## Le damier mutilé

On part d'un damier de **8 cases sur 6**. On en retire **2 cases** — celles dessinées en pointillés ci-dessous.



On dispose de **dominos** : chaque domino recouvre exactement **deux cases voisines**, côte à côte ou l'une au-dessus de l'autre. On veut recouvrir **toute** la partie grise, sans chevauchement, sans débordement, et sans laisser de case libre.

Les trois questions se suivent : la première se règle par un simple comptage, la dernière demande une véritable preuve.

1. **Combien de dominos** faudrait-il exactement ? Que se passe-t-il si ce nombre n'est pas entier ?
2. On colorie le damier comme un vrai échiquier, en alternant deux couleurs. **Combien reste-t-il de cases de chaque couleur ?** Que recouvre un domino, en termes de couleurs ?
3. **Le recouvrement est-il possible ?** Si oui, en proposer un. Si non, le **démontrer**.



## Correction

### Le damier mutilé — Correction

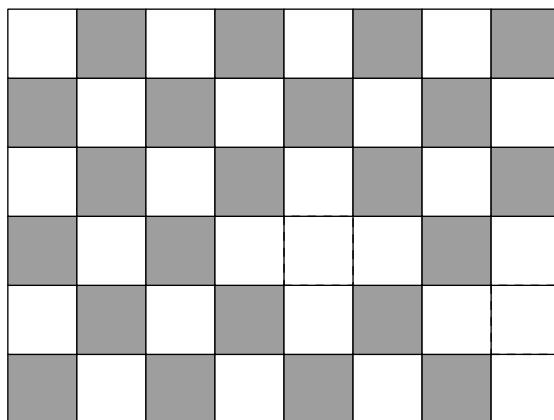
**L'idée maîtresse.** Montrer qu'un pavage existe est facile : il suffit d'en exhiber un. Montrer qu'il n'en existe **aucun** est d'une autre nature — on ne peut pas essayer toutes les dispositions. Il faut trouver une **quantité qui ne change jamais** quand on pose un domino, et constater qu'elle interdit la situation voulue.

1. Le damier complet compte  $8 \times 6 = 48$  cases, dont on retire 2 : il en reste **46**.

Nombre de dominos nécessaires :  $\frac{46}{2} = 23$

**Il faudrait exactement 23 dominos — le compte tombe juste, rien ne s'oppose encore au pavage.**

2. Colorions le damier :



*Le damier colorié comme un échiquier.*

**Il reste 22 cases sombres et 24 cases claires.**

**Ce que fait un domino.** Deux cases voisines n'ont jamais la même couleur sur un damier. Donc **tout domino couvre exactement une case sombre et une case claire** — c'est vrai quelle que soit sa position, horizontale ou verticale. C'est l'invariant cherché.

3.

**Impossible. Il faudrait 23 dominos, et ces 23 dominos couvriraient 23 cases sombres et 23 cases claires — donc autant des deux couleurs.**

**Or il reste 22 sombres et 24 claires : un écart de 2. Le recouvrement est impossible.**

**C'est tout l'intérêt du coloriage.** Le simple comptage des cases ne disait rien : le nombre était pair. C'est l'invariant de couleur qui tranche, sans essayer une seule disposition.

**À retenir.** Pour prouver qu'une construction est impossible, on cherche une quantité que chaque étape laisse inchangée — ici, l'écart entre le nombre de cases sombres et claires, qu'un domino ne modifie jamais. Ce raisonnement par invariant sert bien au-delà des dominos.