Le damier mutilé

Problème — Fiche n°215

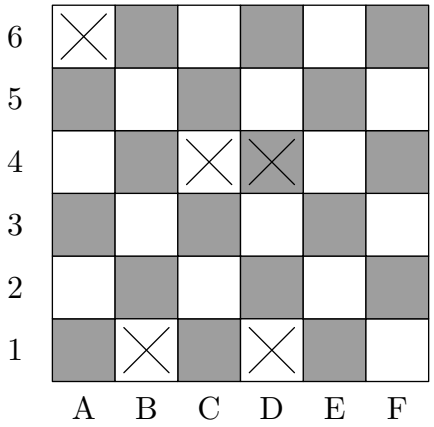
PAVA0215

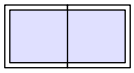
On a retiré quelques cases d'un damier. Peut-on recouvrir tout le reste avec des dominos, sans chevauchement ni débordement ? Quand c'est possible, il suffit de le montrer. Quand ça ne l'est pas, il faut le prouver — et c'est là que le problème devient intéressant.

Le damier mutilé

On part d'un damier de **6 cases sur 6**. Les colonnes sont repérées par des **lettres**, les lignes par des **numéros** : la case en bas à gauche est **A1**.

On en retire **5 cases** : **A6, B1, C4, D1, D4** — barrées d'une croix ci-dessous.





un domino
2 cases voisines

On dispose de **dominos** : chaque domino recouvre exactement **deux cases voisines**, côte à côte ou l'une au-dessus de l'autre. On veut recouvrir **toutes les cases restantes**, sans chevauchement, sans débordement, et sans en laisser une seule libre.

Les trois questions se suivent : la première se règle par un simple comptage, la dernière demande une véritable preuve.

1. **Combien de dominos** faudrait-il exactement ? Que se passe-t-il si ce nombre n'est pas entier ?
2. Le damier est colorié en alternant deux couleurs. **Combien reste-t-il de cases sombres et de cases claires ?** Et que recouvre un domino, en termes de couleurs ?
3. **Le recouvrement est-il possible ?** Si oui, en proposer un. Si non, le **démontrer**.

Correction

Le damier mutilé — Correction

Le coup d'œil qui suffit. Le nombre de cases restantes est **impair**. Un domino en couvre deux : **c'est impossible**. Le comptage de la question 1 suffit.

Voici maintenant le raisonnement complet, question par question.

L'idée maîtresse. Montrer qu'un pavage existe est facile : il suffit d'en exhiber un. Montrer qu'il n'en existe **aucun** est d'une autre nature — on ne peut pas essayer toutes les dispositions. Il faut trouver une **quantité qui ne change jamais** quand on pose un domino, et constater qu'elle interdit la situation voulue.

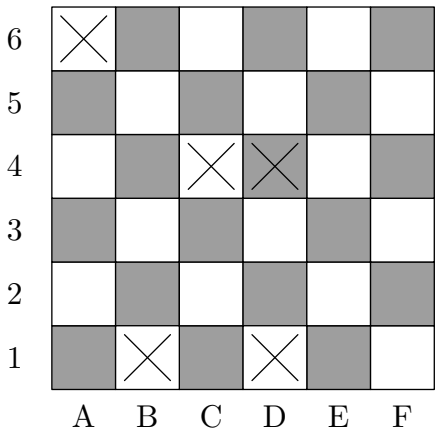
1. Le damier complet compte $6 \times 6 = 36$ cases, dont on retire 5 : il en reste **31**.

Nombre de dominos nécessaires : $\dfrac{31}{2}$

31 est impair : 31 ÷ 2 n'est pas un nombre entier. Or chaque domino couvre exactement 2 cases, donc un pavage couvre toujours un nombre pair de cases.

Le recouvrement est donc impossible, et la question 1 suffit à le prouver.

2. Comptons tout de même les couleurs :



Le damier et ses deux couleurs alternées.

Il reste 17 cases sombres et 14 cases claires.

Ce que fait un domino. Deux cases voisines n'ont jamais la même couleur sur un damier. Donc **tout domino couvre exactement une case sombre et une case claire** — c'est vrai quelle que soit sa position, horizontale ou verticale. C'est l'invariant cherché.

3.

Impossible. Le nombre de cases est impair (question 1) : aucun assemblage de dominos ne peut couvrir un nombre impair de cases.

Remarquons que le coloriage le confirme : 17 et 14 ne peuvent pas être égaux, puisque leur somme est impaire.

À retenir. Pour prouver qu'une construction est impossible, on cherche une quantité que chaque étape laisse inchangée — ici, l'écart entre le nombre de cases sombres et claires, qu'un domino ne modifie jamais. Ce raisonnement par invariant sert bien au-delà des dominos.