Le damier mutilé

Problème — Fiche n°254

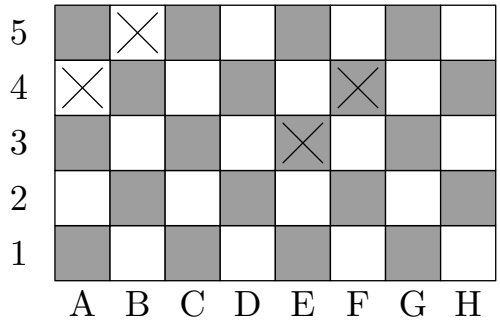
PAVA0254

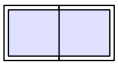
On a retiré quelques cases d'un damier. Peut-on recouvrir tout le reste avec des dominos, sans chevauchement ni débordement ? Quand c'est possible, il suffit de le montrer. Quand ça ne l'est pas, il faut le prouver — et c'est là que le problème devient intéressant.

Le damier mutilé

On part d'un damier de **8 cases sur 5**. Les colonnes sont repérées par des **lettres**, les lignes par des **numéros** : la case en bas à gauche est **A1**.

On en retire **4 cases** : **A4, B5, E3, F4** — barrées d'une croix ci-dessous.





un domino
2 cases voisines

On dispose de **dominos** : chaque domino recouvre exactement **deux cases voisines**, côte à côte ou l'une au-dessus de l'autre. On veut recouvrir **toutes les cases restantes**, sans chevauchement, sans débordement, et sans en laisser une seule libre.

Les trois questions se suivent : la première se règle par un simple comptage, la dernière demande une véritable preuve.

1. **Combien de dominos** faudrait-il exactement ? Que se passe-t-il si ce nombre n'est pas entier ?
2. Le damier est colorié en alternant deux couleurs. **Combien reste-t-il de cases sombres et de cases claires ?** Et que recouvre un domino, en termes de couleurs ?
3. **Le recouvrement est-il possible ?** Si oui, en proposer un. Si non, le **démontrer**.

Correction

Le damier mutilé — Correction

Le coup d'œil qui suffit. La case **A5** est **isolée** : aucune de ses voisines n'est sur le plateau. Aucun domino ne peut donc la couvrir — **c'est impossible**, et cela se voit d'un seul regard, sans compter quoi que ce soit.

Voici maintenant le raisonnement complet, question par question.

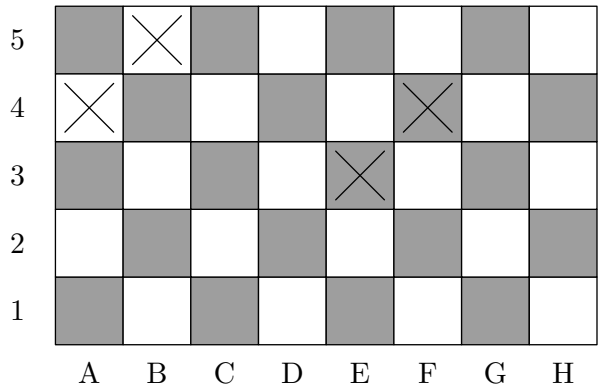
L'idée maîtresse. Montrer qu'un pavage existe est facile : il suffit d'en exhiber un. Montrer qu'il n'en existe **aucun** est d'une autre nature — on ne peut pas essayer toutes les dispositions. Il faut trouver une **quantité qui ne change jamais** quand on pose un domino, et constater qu'elle interdit la situation voulue.

1. Le damier complet compte $8 \times 5 = 40$ cases, dont on retire 4 : il en reste **36**.

Nombre de dominos nécessaires : $\dfrac{36}{2} = 18$

Il faudrait exactement 18 dominos — le compte tombe juste, rien ne s'oppose encore au pavage.

2. Comptons les cases de chaque couleur :



Le damier et ses deux couleurs alternées.

Il reste 18 cases sombres et 18 cases claires.

Ce que fait un domino. Deux cases voisines n'ont jamais la même couleur sur un damier. Donc **tout domino couvre exactement une case sombre et une case claire** — c'est vrai quelle que soit sa position, horizontale ou verticale. C'est l'invariant cherché.

3.

Impossible — et cette fois le coloriage ne suffit pas : les deux couleurs sont en nombre égal (18 et 18). Il faut regarder la forme du plateau.

La case A5 est isolée : aucune de ses voisines n'appartient au plateau. Aucun domino ne peut donc la couvrir, puisqu'un domino a besoin de deux cases voisines.

La leçon la plus importante de ce problème : l'équilibre des couleurs est une condition **nécessaire**, elle n'est pas **suffisante**. Un invariant qui ne s'oppose à rien ne prouve pas que la chose est possible — il faut alors exhiber une solution, ou trouver un autre obstacle.

À retenir. Pour prouver qu'une construction est impossible, on cherche une quantité que chaque étape laisse inchangée — ici, l'écart entre le nombre de cases sombres et claires, qu'un domino ne modifie jamais. Ce raisonnement par invariant sert bien au-delà des dominos.