



Le programme de calcul

Problème — Fiche n°275



PCAL0275

Un programme de calcul à appliquer, un résultat à observer, et surtout une propriété à démontrer. Essayer sur deux ou trois nombres ne prouve rien : il faut appeler n le nombre choisi et mener le calcul avec la lettre.

Le programme de calcul

Voici **deux** programmes de calcul :

Programme A

1. Choisis un nombre.
2. Retranche 1.
3. Élève le résultat au carré.
4. Ajoute 4.

Programme B

1. Choisis un nombre.
2. Multiplie par 3.
3. Ajoute 1.

Réponds aux trois questions, dans l'ordre : la première se fait de tête, la dernière demande une démonstration.

1. Applique les deux programmes au nombre **1**, puis au nombre **4**.
2. Peut-on en conclure que les deux programmes donnent toujours le même résultat ?
3. Prouve ta réponse.

Fais tes calculs au brouillon, puis rédige.

Correction

Le programme de calcul — Correction

1. Programme A :

Étape	avec 1	avec 4
Nombre choisi	1	4
Retranche 1	0	3
Élève le résultat au carré	0	9
Ajoute 4	4	13

Programme B :

Étape	avec 1	avec 4
Nombre choisi	1	4
Multiplie par 3	3	12
Ajoute 1	4	13

Les deux programmes donnent bien le même résultat avec 1 et avec 4.

2. Non, on ne peut rien en conclure. Deux essais réussis ne démontrent rien du tout.

3. La preuve tient en un seul nombre : essayons 0.

Programme	avec 0
A	5
B	1

Les résultats diffèrent : 0 est un contre-exemple, et un contre-exemple suffit à conclure.

Le calcul littéral montre d'où vient la coïncidence :

On appelle n le nombre choisi et on refait le programme A avec la lettre :

Nombre choisi : n

Retranche 1 : $n - 1$

Élève le résultat au carré : $n^2 - 2n + 1$

Ajoute 4 : $n^2 - 2n + 5$

On appelle n le nombre choisi et on refait le programme B avec la lettre :

Nombre choisi : n

Multiplie par 3 : $3n$

Ajoute 1 : $3n + 1$

Différence : $(n^2 - 2n + 5) - (3n + 1) = n^2 - 5n + 4$

soit $(n - 1)(n - 4)$

Cette différence s'annule pour $n = 1$ et pour $n = 4$ — précisément les deux nombres que l'énoncé faisait essayer — et **pour aucun autre**. L'égalité observée n'était pas une propriété des programmes : c'était un piège tendu par le choix des nombres.

La leçon. Un exemple ne prouve jamais qu'une propriété est vraie ; un seul contre-exemple suffit à prouver qu'elle est fausse. Les deux affirmations ne sont pas symétriques, et c'est l'une des idées les plus importantes de tout le collège.