



Le programme de calcul

Problème — Fiche n°281



PCAL0281

Un programme de calcul à appliquer, un résultat à observer, et surtout une propriété à démontrer. Essayer sur deux ou trois nombres ne prouve rien : il faut appeler n le nombre choisi et mener le calcul avec la lettre.

Le programme de calcul

Voici **deux** programmes de calcul :

Programme A

1. Choisis un nombre.
2. Multiplie par 2.
3. Ajoute 2.

Programme B

1. Choisis un nombre.
2. Retrancher 3.
3. Élève le résultat au carré.
4. Ajoute 8.

Réponds aux trois questions, dans l'ordre : la première se fait de tête, la dernière demande une démonstration.

1. Applique les deux programmes au nombre **3**, puis au nombre **5**.
2. Peut-on en conclure que les deux programmes donnent toujours le même résultat ?
3. Prouve ta réponse.

Fais tes calculs au brouillon, puis rédige.

Correction

Le programme de calcul — Correction

1. Programme A :

Étape	avec 3	avec 5
Nombre choisi	3	5
Multiplie par 2	6	10
Ajoute 2	8	12

Programme B :

Étape	avec 3	avec 5
Nombre choisi	3	5
Retranche 3	0	2
Élève le résultat au carré	0	4
Ajoute 8	8	12

Les deux programmes donnent bien le même résultat avec 3 et avec 5.

2. Non, on ne peut rien en conclure. Deux essais réussis ne démontrent rien du tout.

3. La preuve tient en un seul nombre : essayons 0.

Programme	avec 0
A	2
B	17

Les résultats diffèrent : 0 est un contre-exemple, et un contre-exemple suffit à conclure.

Le calcul littéral montre d'où vient la coïncidence :

On appelle n le nombre choisi et on refait le programme A avec la lettre :

Nombre choisi : n

Multiplie par 2 : $2n$

Ajoute 2 : $2n + 2$

On appelle n le nombre choisi et on refait le programme B avec la lettre :

Nombre choisi : n

Retranche 3 : $n - 3$

Élève le résultat au carré : $n^2 - 6n + 9$

Ajoute 8 : $n^2 - 6n + 17$

Différence : $(n^2 - 6n + 17) - (2n + 2) = n^2 - 8n + 15$

soit $(n - 3)(n - 5)$

Cette différence s'annule pour $n = 3$ et pour $n = 5$ — précisément les deux nombres que l'énoncé faisait essayer — et **pour aucun autre**. L'égalité observée n'était pas une propriété des programmes : c'était un piège tendu par le choix des nombres.

La leçon. Un exemple ne prouve jamais qu'une propriété est vraie ; un seul contre-exemple suffit à prouver qu'elle est fausse. Les deux affirmations ne sont pas symétriques, et c'est l'une des idées les plus importantes de tout le collège.