



# Le programme de calcul

Problème — Fiche n°89



PCAL0089

Un programme de calcul à appliquer, un résultat à observer, et surtout une propriété à démontrer. Essayer sur deux ou trois nombres ne prouve rien : il faut appeler  $n$  le nombre choisi et mener le calcul avec la lettre.

## Le programme de calcul

Voici **deux** programmes de calcul :

### Programme A

1. Choisis un nombre.
2. Retranche 1.
3. Élève le résultat au carré.
4. Ajoute 11.

### Programme B

1. Choisis un nombre.
2. Multiplie par 3.
3. Ajoute 6.

Réponds aux trois questions, dans l'ordre : la première se fait de tête, la dernière demande une démonstration.

1. Applique les deux programmes au nombre **2**, puis au nombre **3**.
2. Peut-on en conclure que les deux programmes donnent toujours le même résultat ?
3. Prouve ta réponse.

Fais tes calculs au brouillon, puis rédige.

## Correction

### Le programme de calcul — Correction

1. Programme A :

| Étape                      | avec 2 | avec 3 |
|----------------------------|--------|--------|
| Nombre choisi              | 2      | 3      |
| Retranche 1                | 1      | 2      |
| Élève le résultat au carré | 1      | 4      |
| Ajoute 11                  | 12     | 15     |

Programme B :

| Étape           | avec 2 | avec 3 |
|-----------------|--------|--------|
| Nombre choisi   | 2      | 3      |
| Multiplie par 3 | 6      | 9      |
| Ajoute 6        | 12     | 15     |

Les deux programmes donnent bien le même résultat avec 2 et avec 3.

2. Non, on ne peut rien en conclure. Deux essais réussis ne démontrent rien du tout.

3. La preuve tient en un seul nombre : essayons 0.

| Programme | avec 0 |
|-----------|--------|
| A         | 12     |
| B         | 6      |

Les résultats diffèrent : 0 est un contre-exemple, et un contre-exemple suffit à conclure.

Le calcul littéral montre d'où vient la coïncidence :

On appelle  $n$  le nombre choisi et on refait le programme A avec la lettre :

Nombre choisi :  $n$

Retranche 1 :  $n - 1$

Élève le résultat au carré :  $n^2 - 2n + 1$

Ajoute 11 :  $n^2 - 2n + 12$

On appelle  $n$  le nombre choisi et on refait le programme B avec la lettre :

Nombre choisi :  $n$

Multiplie par 3 :  $3n$

Ajoute 6 :  $3n + 6$

Différence :  $(n^2 - 2n + 12) - (3n + 6) = n^2 - 5n + 6$

soit  $(n - 2)(n - 3)$

Cette différence s'annule pour  $n = 2$  et pour  $n = 3$  — précisément les deux nombres que l'énoncé faisait essayer — et **pour aucun autre**. L'égalité observée n'était pas une propriété des programmes : c'était un piège tendu par le choix des nombres.

**La leçon.** Un exemple ne prouve jamais qu'une propriété est vraie ; un seul contre-exemple suffit à prouver qu'elle est fausse. Les deux affirmations ne sont pas symétriques, et c'est l'une des idées les plus importantes de tout le collège.